UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI SALERNO

DIPARTIMENTO DI SCIENZE POLITICHE, SOCIALI E DELLA COMUNICAZIONE

DOTTORATO DI RICERCA IN

SCIENZE DEL LINGUAGGIO, DELLA SOCIETÀ, DELLA POLITICA E DELL'EDUCAZIONE

XXXV CICLO

Metodologia della ricerca educativa

TESI DI DOTTORATO

in

La valutazione delle competenze matematiche alla fine del biennio nella scuola secondaria di secondo grado

Coordinatore

Chiar.mo Prof. Filippo Fimiani

Candidata

Carole Montefusco

Matricola:
8801400095

Tutor

Chiar.mo Prof. Antonio Marzano

Anno Accademico 2021/2022

Sommario

INTRODUZIONE **4**
CAPITOLO I **9**
DALLA CONOSCENZA ALLA COMPETENZA **9**
1.1 Il concetto di competenza e la sua evoluzione nel tempo 12
1.2 Definizione di competenza 17
1.3 La competenza nello scenario normativo internazionale. 21
1.4 I riferimenti normativi nazionali 27
1.5 La competenza matematica 32
CAPITOLO 2 ..... **44**
COMPETENZA MATEMATICA E VALUTAZIONE **44**
2.1 Matematica e realtà 44
2.2 Quale realtà per l'educazione alla matematica 46
2.2.1 L'interesse nella dimensione affettiva 50
2.3 Discrasie tra pratiche educative e letteratura pedagogica 54
2.3.1 Il ruolo della valutazione formativa 54
2.4 L'intercettazione di contesti di realtà significativi 57
2.5 La misurazione valutativa 58
2.5.1 Distorsioni nella misurazione 60
2.6 La competenza matematica nelle prove INVALSI 63
2.7 Come si valuta la competenza matematica nelle Prove INVALSI 66
CAPITOLO III **75**
LA DIDATTICA E LA MATEMATICA **75**
3.1 La didattica per competenze 75
3.2 Progettare per traguardi formativi 86
3.3 La didattica della matematica 95
3.4 Didattica e valutazione 102
3.5 L'insegnamento della matematica nella scuola secondaria di secondo grado 105
3.6 La tecnologia a supporto della didattica della matematica 118
CAPITOLO IV **122**
PROVE DI COMPETENZA MATEMATICA: ASPETTI E CRITICITÀ **122**
4.1. La normativa sulle competenze nel biennio della secondaria di secondo grado 122
4.1.1 Il quadro italiano 123
4.2 Caratteristiche delle prove di competenza 128

4.3 Relazione tra prove di competenza e normativa nazionale 132
4.4 Le prove standardizzate nella valutazione 134
4.5 Le rilevazioni OCSE PISA 137
4.6 Un confronto docimologico tra le prove INVALSI e OCSE PISA 154
4.7 I risultati delle prove INVALSI e OCSE PISA 161
4.8 La percezione della matematica 169
4.9 Il ruolo del docente 172
4.9.1 Competenza comunicativa 173
4.9.2 La competenza sociale 176
4.9.3 La competenza digitale 178
4.9.4 La competenza metodologica 179
4.9.5 La competenza di innovazione educativa 180
4.9.6 La competenza emotiva 181
4.9.7 La competenza matematica del docente 182
4.10 Le criticità come potenzialità per una migliore azione didattica 183
4.10.1 L'azione didattica integrata 184
4.10.2 L'azione didattica inclusiva 188
4.10.3 L'azione didattica volta all'interpretazione e alla modellizzazione 190
CAPITOLO V 194
VALUTARE L'APPRENDIMENTO 194
5.1 Valutare l'apprendimento 194
5.1.1 La valutazione formativa 197
5.1.2 Strumenti di valutazione autentica 201
5.1.3 Pratiche didattiche per la Valutazione autentica 206
5.2 Per un agire competente 217
5.3 Il ciclo di apprendimento esperienziale in Matematica: alcune esperienze didattiche 226
5.4 Valutazione delle competenze matematiche degli studenti della scuola secondaria di secondo grado 229
CONCLUSIONI 235
BIBLIOGRAFIA 239

INTRODUZIONE

La valutazione è da considerarsi come una forma
di intelligenza pedagogica per orientare la costruzione e
l'indirizzo didattico del programma. (Bruner, 2000)

Negli ultimi anni, l'acquisizione di competenze è diventata una questione centrale nell'istruzione e nella didattica. L'enfasi tradizionale sulla conoscenza fattuale in quanto tale, infatti, non soddisfa più le esigenze di una società che cambia. Il concetto di competenza è associato alla capacità di padroneggiare situazioni complesse e presume che superi i livelli di conoscenza e abilità, mentre il suo surplus spiega le conoscenze e le abilità da applicare in modo efficace. Il concetto di "competenza" è interessante e fondamentale in numerosi ambiti, perché è facilmente identificabile con capacità, qualifiche e abilità preziose, tenendo conto dell'uso efficace delle proprie conoscenze e abilità in un contesto specifico, solitamente complesso. La sua stessa evoluzione, come verrà evidenziato nel primo capitolo, è piuttosto complessa e articolata (Isfol, 1997). L'idea di base è che la padronanza delle conoscenze e delle abilità rilevanti non è garanzia di prestazioni di successo in ambienti complessi se non supportata da un comportamento efficiente ed efficace. Ciò richiede speciali "abilità" che tengano conto delle caratteristiche di un contesto specifico. Vi sono, pertanto almeno due distinte denotazioni di "competenze" nell'educazione. Come approfondito nel terzo capitolo, da un punto di vista teorico, la competenza è concepita come una struttura cognitiva che facilita comportamenti specifici. Da un punto di vista operativo, le competenze sembrano coprire un'ampia gamma di abilità e comportamenti di ordine superiore che rappresentano la capacità di far fronte a situazioni complesse e imprevedibili. Questa definizione operativa include conoscenza, abilità, attitudini, metacognizione e pensiero strategico, mentre presuppone un processo decisionale consapevole e intenzionale (Pellerey, 2004). Le competenze definite dagli organismi europei, nonché dagli esperti in materia di istruzione, consistono in tre ingredienti correlati: una componente della conoscenza (la parte che comprende); una componente comportamentale (il repertorio comportamentale palese); una

componente di valore (valori, credenze e atteggiamenti). Una persona competente, quindi, che svolge un'attività avrà una combinazione di abilità, conoscenze, attitudini e comportamenti richiesti per l'esecuzione efficace dell'attività o del compito che le è stato affidato. Una competenza è definita come la sintesi olistica di questi componenti. In tal senso, nel primo capitolo si analizza come il concetto di competenza si è evoluto nello scenario normativo internazionale: partendo dagli interventi dell'Oms (1993), si giunge all'Organizzazione per la cooperazione e lo sviluppo economico (OCSE, 2012) la quale attraverso il PISA (Programma per la valutazione internazionale degli studenti) di cui si tratterà nel terzo capitolo, ha lavorato molto sulla definizione delle competenze e ha creato un quadro per il confronto delle competenze degli studenti ai fini della valutazione.

La valutazione oggi è diventata quasi una nozione pervasiva (Wiggins, McTighe, 1998): essa è predominante in ambito scolastico, orienta e guida la ricerca scientifica, governa tutti i campi del sociale, dall'amministrazione alla politica, all'economia. La valutazione è un processo dinamico a cui generalmente sono chiamati tutti gli operatori che attuano interventi educativi e didattici. Essa assume una presenza continua che indaga, in ambito educativo e pedagogico, non solo singole classi scolastiche ma intere scuole e sistemi educativi nella loro complessità.

Il presupposto della valutazione, soprattutto in ambito scolastico, si fonda sul principio che le attività che insegnanti ed alunni compiono sono attività organizzate e finalizzate, ed hanno bisogno dunque di essere controllate e verificate. La scuola infatti deve continuamente valutare se stessa e usare i risultati di quest'azione al fine di un miglioramento costante della propria condotta. L'efficienza della scuola è dunque definibile come corrispondenza tra la quantità di apprendimento che la scuola intende far conseguire agli allievi e la quantità di apprendimento effettivamente realizzata da questi. La valutazione stessa diventa allora un elemento che concorre a determinare il quadro stesso dell'attività formativa (Bolondi, Ferretti, Giberti, 2018).

Alla luce di tali riflessioni, l'obiettivo del presente lavoro di tesi è quello di porre in evidenza l'importanza del concetto di competenza che sta assumendo un ruolo sempre più necessario e preponderante all'interno della società ed in tutti i contesti,

siano essi professionali che educativi. In tal senso, nel terzo capitolo, ci si soffermerà sulla competenza matematica indagando il contesto della didattica per competenze e della programmazione sulla base dei traguardi formativi (Da Re, 2013), per poi indirizzare il lavoro verso la didattica per competenze applicata ai concetti matematici e supportata da specifici processi valutativi.

Se l'istruzione scolastica mira a preparare gli studenti per le loro vite future, la matematica è sicuramente una componente centrale di questo tipo di educazione. Essa è considerata una delle cinque competenze di base che contribuiscono all'istruzione generale. In questo contesto, la matematizzazione (Ocse-Pisa, 2012) potrebbe essere intesa come il trasferimento di un problema da una situazione reale nel linguaggio della matematica, risolvendo tale quesito matematico con gli strumenti della matematica e quindi valutando il risultato rispetto al problema del mondo reale. In questo senso, la matematizzazione equivale alla modellazione matematica così come viene definita nella letteratura relativa all'educazione matematica. In tale direzione il programma PISA, focalizzandosi sulla prospettiva dalla vita futura degli studenti, si concentra sulle capacità di cui gli studenti avranno bisogno per gestire i problemi nella loro vita quotidiana. Di conseguenza, l'alfabetizzazione matematica (Ligabue, 2020), così come valutata nel programma PISA, è definita come la capacità di un individuo di identificare e comprendere il ruolo che la matematica gioca nel mondo, di formulare giudizi matematici ben fondati e di utilizzare e interagire con la matematica in modi che soddisfino i bisogni di quell'individuo vita da cittadino costruttivo, interessato e riflessivo. Purtroppo, l'abitudine di dedicare la maggior parte del tempo di insegnamento agli aspetti procedurali, impedisce di raccogliere e affrontare adeguatamente gli aspetti relazionali. Il secondo capitolo introdurrà dunque elementi quali la motivazione, la curiosità, l'attitudine alla collaborazione che sono gli aspetti comportamentali che integrano le conoscenze, valorizzano gli stili cognitivi individuali per la piena realizzazione della persona, facilitano la possibilità di conoscere le proprie attitudini e potenzialità anche in funzione orientativa. Dal punto di vista didattico, il recupero dell'approccio che tiene conto dei fattori di motivazione e dell'ambiente di apprendimento è di fondamentale importanza nell'insegnamento (De Bellis, Goldin, 2006). I fattori motivazionali includono non solo le situazioni più piacevoli e

divertenti, ma anche quegli elementi relativi alla curiosità, al gioco, alle esperienze individuali e di gruppo che possono diventare fonte di discussione, di ipotesi di lavoro, di scoperta, di riflessione tra studenti e tra insegnante e i suoi studenti. Le condizioni dell'ambiente di apprendimento (Zanniello, 2008) derivano principalmente da una pianificazione svolta dall'insegnante considerando, in una dimensione di un processo dialettico e in progress, il lavoro sia dello studente che dell'insegnante e della relazione didattica che è stabilito ogni volta. In un tale percorso di didattica laboratoriale la finalità principale è quella di incrementare specifiche capacità sperimentali che consentano al soggetto di auto-formarsi mettendo in pratica quanto appreso in precedenza. In tal senso, il luogo dell'apprendimento laboratoriale favorisce in maniera significativa le potenzialità degli individui (Pinto Minerva, 2005). L'apprendimento assume una importante funzione pedagogico-formativa, il cui focus è il contesto dotato di novità. Le differenze intersoggettive vengono valorizzate attraverso lo scambio comunicativo e il lavoro partecipativo in cui l'impegno del singolo viene canalizzato in relazione al raggiungimento del traguardo formativo dettato dal gruppo.

Quando si parla di didattica della matematica, dunque, risulta quanto mai necessario porre in evidenza il tema della valutazione, da considerarsi come elemento essenziale che permette di migliorare l'insieme delle azioni di tutti i soggetti e fattori implicati nella relazione educativa. Pertanto, la valutazione dovrebbe premettere un monitoraggio e una regolazione costante dei percorsi didattici intrapresi, in vista del raggiungimento degli obiettivi curricolari, predisponendo dispositivi e tecniche di formative assessment anche in ambito matematico (Ferretti et al., 2018). Soffermando l'attenzione sui processi di insegnamento della matematica nell'istruzione superiore (terzo e quarto capitolo), appare quanto mai necessario riformare questa pratica, spesso radicata nella teoria costruttivista, considerando approcci pedagogici più innovativi, come il game-based learning e la gamification, la didattica per problemi reali e i nuovi sistemi di valutazione e apprendimento online, al fine di promuovere la comprensione concettuale degli studenti (Nesti, 2017).

L'esperienza innesca un processo tale da rendere la motivazione degli studenti fonte di apprendimento consapevole e partecipato.

In tale prospettiva la scuola si trasforma in un grande laboratorio didattico inteso come luogo di ricerca e di formazione sia dei docenti che degli studenti; aperto e capace di sviluppare nuove motivazioni al piacere di insegnare e di apprendere in soggetti generazionalmente diversi in una scuola che si riconosce come luogo visibile non solo di socializzazione e di istruzione, ma anche di trasmissione di valori.

CAPITOLO I

DALLA CONOSCENZA ALLA COMPETENZA

Il concetto di competenza è presente nella letteratura in campo educativo da molti decenni con una maggiore diffusione nel sistema scolastico dall'ultimo decennio del XX secolo.

A seguito della globalizzazione, della nascita della società moderna e della conseguente sempre più rapida obsolescenza delle conoscenze, si è costatato che l'apprendimento basato su conoscenze elementari e saperi procedurali, conseguiti tramite l'applicazione ripetuta, non garantisce l'acquisizione di atteggiamenti che siano in grado di rispondere alle richieste attuali della vita e del lavoro. Sono proprio queste richieste a veicolare, perciò, l'attenzione e l'interesse verso il costrutto di competenza non solo degli studiosi in campo educativo ma in svariati settori, dall'economia alla gestione aziendale, dalla psicologia alla formazione, all'istruzione, fino alla politica.

Nella società post-industriale la caratterizzazione del lavoro è mutata rispetto al passato: si connota di più rispetto ai contenuti di conoscenza che rispetto all'aspetto meramente manuale ed esecutivo; si connota di più di relazioni, di comunicazione, di strategie, di responsabilità individuale, di condivisione dei valori aziendali per cui aumenta e riveste sempre più importanza il suo aspetto immateriale; si connota di più per la sua maggiore mobilità (interna o esterna) il che impone la necessità di disporre di strumenti di comunicazione del sapere e del saper fare delle persone diversi da titoli di studio o curricoli che consentano di valutare il potenziale umano per indirizzare, orientare, qualificare e riqualificare la manodopera (Da Re, 2013, Marzano, 2013).

L'Unione Europea comincia a muoversi in tal senso dal 1993 (Libro Bianco anche detto "Rapporto Delors") e con una velocità crescente sottolinea l'importanza dell'investimento sociale nella formazione per la crescita e lo sviluppo di un'economia aperta e competitiva. Occorre preparare i cittadini europei ad una transizione verso una società nella quale non si smetta di insegnare e apprendere per tutta la vita e per dirla con Edith Cresson (1995) guidarli verso una *società*

conoscitiva, superando le divisioni tra educazione formale, non formale e informale, e promuovendo una formazione in grado di diffondere i valori della democrazia e della cittadinanza attiva che consentano di migliorare lo sviluppo e la crescita dell'individuo.

Si è pertanto reso necessario un ammodernamento del sistema scolastico. In ambito educativo si è iniziato a porre l'accento sul concetto di competenza in quanto referenza non fissa ma dinamica, in grado di rispondere a queste nuove esigenze. Agli insegnanti è chiesto di adeguarsi alle evoluzioni del mondo e allontanarsi da un insegnamento di tipo meramente trasmissivo andando nella direzione di pratiche innovative che permettano di raggiungere i nuovi bisogni formativi. Si va verso una "scuola delle competenze" che, pur senza rinunciare all'importanza dei saperi e delle discipline, mira a promuovere lo sviluppo delle capacità applicative e delle abilità trasversali.

L'irruzione dello "*spettro*" della competenza nel dibattito sulla scuola, prima ancora che nel nostro paese a livello internazionale, è stato

> ……portatore di un potenziale deflagrante rispetto ai modi di intendere l'insegnamento/apprendimento e la valutazione in ambito scolastico in quanto espressione di un cambiamento di paradigma che modifica alle radici l'idea di sapere e di apprendimento. Non si tratta solo di un cambiamento di superficie, risolvibile sostituendo concetti più frequentati, come quello di conoscenze o abilità, con il nuovo termine, richiede di ripensare in profondità i modi del fare scuola in tutte le loro manifestazioni (Castoldi, 2011, p. 17).

Per molti anni scuola e mondo della vita quotidiana sono stati considerati ambienti separati: a scuola si apprendevano i saperi che sarebbero serviti per la vita di cittadini e non solo di lavoratori ma l'assunto di base del sistema era che non vi era il bisogno di sapere a che cosa serviva nella vita una nozione appresa a scuola in quanto, se realmente compresa, automaticamente essa sarebbe stata applicata alle situazioni di vita quotidiana (Trinchero, 2017). A partire dagli anni '80 tale visione viene sconfessata sia da riflessioni teoriche che da evidenze empiriche. Molto interessante è quanto sottolineato, per esempio, da Gardner (1993):

> Anche gli studenti meglio preparati e dotati di tutti i carismi del successo scolastico (regolare frequenza di scuole valide, valutazioni molto elevate, buoni punteggi nei test, riconoscimenti da parte degli insegnanti) non mostrano una comprensione adeguata. […]. Posti di fronte a problemi elementari [tratti dal mondo reale] formulati in modo anche solo leggermente diverso da quello in cui li avevano affrontati a scuola

> […] danno spiegazioni sostanzialmente identiche a quelle proposte da studenti che non si sono mai cimentati con quella disciplina (p. 13-14).

La testimonianza empirica della non automaticità del transfer degli apprendimenti alla vita quotidiana è, d'altra parte, testimoniata dalle indagini svolte da organismi come Iea-Timss e OCSE-PISA che dimostrano, dati i ripetuti risultati deludenti ottenuti dagli studenti, quanto sia difficile applicare le risorse a problemi di vita quotidiana. Le competenze richieste nella vita quotidiana non sono irrilevanti: gran parte degli adulti che hanno frequentato la scolarità di base rimangono sprovveduti davanti alle tecnologie e alle regole della vita quotidiana. In questo senso, non delimitando il ruolo della scuola agli apprendimenti di base, Perrenoud (2003) ci pone la domanda: "*A che serve istruire un individuo durante 10 o 15 anni della sua vita se continua ad essere impreparato, ad esempio, all'interpretazione di un contratto di assicurazione o di un foglio illustrativo farmaceutico?".*

Le grandi discontinuità fra l'apprendimento scolastico e la natura dell'attività cognitiva fuori della scuola sono ben identificate in un articolo di Resnick già nel 1995:

a) la scuola si concentra sulla prestazione individuale, mentre il lavoro mentale all'esterno è spesso condiviso socialmente;

b) la scuola è finalizzata a incoraggiare il pensiero privo di supporti, mentre il lavoro mentale fuori dalla scuola include abitualmente strumenti cognitivi;

c) la scuola coltiva il pensiero simbolico, laddove l'attività mentale fuori dalla scuola è direttamente coinvolta con oggetti e situazioni;

d) la scuola ha il fine di insegnare capacità e conoscenze generali, mentre all'esterno dominano le competenze specifiche per la situazione.

Nonostante il concetto di competenza è ancora, dopo molti anni, al centro del dibattito educativo nel mondo della ricerca e nel mondo della scuola, la promozione delle competenze rimane, però, ancora di "facciata" e non riesce a modificare le consuete pratiche educative anche se ogni documento, sia di emanazione ministeriale, sia prodotto dagli insegnanti negli istituti, riporti riferimenti sistematici alle competenze chiave europee, ai traguardi di competenze delle Indicazioni nazionali e alle rubriche per la valutazione autentica (Benadusi, Molina, 2018).

1.1 Il concetto di competenza e la sua evoluzione nel tempo

Il sostantivo competenza deriva dal verbo competere, dal latino cum-petere cioè "chiedere, dirigersi a", che indica l'azione di "andare insieme, far convergere in un medesimo punto". D'altra parte il "competente" è chi possiede la piena capacità di orientarsi in determinati campi e nella connotazione amministrativo-giuridica chi ha la legittima autorità di esplicare un mandato, cioè uno specialista, che "se ne intende" (Nuovo Vocabolario della Lingua Italiana Devoto-Oli, 1987). Esso evoca anche il verbo italiano "competere" cioè far fronte a una situazione sfidante, o il sostantivo competizione, che riporta all'immagine di atleti che si confrontano per vincere una gara (Pellerey, 2004).

La convergenza di studi di molte discipline quali la psicologia, la linguistica, la sociologia, la pedagogia e, più in generale, le scienze dell'educazione, verso il concetto ne hanno determinato, da un alto, l'arricchimento del suo contenuto nel tempo e, dall'altro, la presenza di valenze e diversità semantiche a seconda delle teorie di riferimento caratterizzanti il momento storico.

Gli studi della psicologia cognitiva si sono concentrati sulle caratteristiche della persona che ne facilitano il successo personale e professionale mentre quelli della psicologia del lavoro hanno puntato sulle caratteristiche che contraddistinguono una specifica competenza, ed in particolare, attraverso gli studi sull'*expertise* ha posto l'accento sul *problem solving*.

In campo linguistico, invece, il linguista e filosofo statunitense Chomsky (1970), ha distinto tra la competenza quale conoscenza che un individuo ha delle regole che permettono di utilizzare una lingua, e la *performance* cioè cosa l'individuo riesce a fare attraverso la lingua in situazioni concrete che perciò rappresenta la prestazione del soggetto, quindi l'unica componente osservabile delle potenzialità di un individuo.

La sociologia del lavoro, ritenendo che la competenza non riguarda solo il singolo ma anche la collettività, in quanto l'individuo deve essere in grado di mobilitare sia le proprie risorse che quelle provenienti dal proprio contesto di riferimento, si è

concentrata sui saperi richiesti al lavoratore per poter risolvere i problemi che derivano dalla particolare professione.

In pedagogia, Pellerey, (2004) tenendo conto dei contributi provenienti da altre discipline e dei cambiamenti epistemologici avutisi nel corso del tempo, ha individuato tre approcci principali che qualificano il termine competenza: il comportamentista, il cognitivista e il piagetiano.

Secondo la teoria comportamentista che prevaleva agli inizi degli anni settanta la competenza era identificata come la capacità del soggetto di costruire algoritmi operativi per cui era usata nell'accezione di comportamento, cioè di performance che il soggetto, in determinate condizioni, manifesta in un determinato ambito e, pertanto, come prestazione osservabile e misurabile, in un certo modo analoga alla nozione di abilità, ignorando tutti gli aspetti sottesi ai comportamenti manifesti. Di conseguenza, dato che la competenza si definiva come una semplice esecuzione di operazioni, anche la formazione poneva l'attenzione sulle attività che l'individuo metteva in essere per raggiungere gli obiettivi che si era prefissato.

Successivamente alla fine degli anni Sessanta, prevalgono le teorie cognitiviste secondo le quali la competenza è governata da processi cognitivi interni "*ad un soggetto considerato capace di analizzare una situazione problematica ed individuare successivamente gli elementi utili per determinare in maniera autonoma ed originale un percorso risolutivo efficace*". (Marzano, 2013, p.69). Secondo tale prospettiva il soggetto elabora gli stimoli provenienti dall'esterno rispondendo ad essi con un comportamento manifesto e, pertanto, il concetto di competenza non presuppone solo il possesso di uno schema che preordina l'azione ma anche una molteplicità di elementi concernenti la sfera affettiva, cognitiva e motoria in quanto l'individuo va considerato nella sua totalità e l'apprendimento non è avulso dalla sfera affettivo-emozionale.

L'ultimo approccio preso in esame da Pellerey (2004), sviluppatosi in prevalenza negli anni Ottanta, considera la competenza come una mobilitazione di schemi d'azione. Secondo Piaget (1972), in un primo stadio, lo schema è guidato solo da riflessi, per poi evolversi gradualmente grazie ad un processo dinamico di assimilazione, ovvero il consolidamento di un comportamento dovuto all'esercizio,

e di accomodamento, ovvero il modificarsi di uno schema già assimilato a causa dello scontro con una situazione non prevista. In tale processo l'individuo elabora schemi sempre più articolati e complessi.

In ambito educativo, più specificamente, il concetto di competenza si collega al modello educativo delle scuole attive, nate dalla critica alla scuola tradizionale considerata passiva e lontana dalla realtà. Esse ponevano al centro di ogni attività il fare in situazione, sostenevano la centralità dell'allievo quale attivo protagonista in grado di sviluppare strategie di pensiero e mobilitare le proprie conoscenze in situazioni concrete (Marzano, 2013 p. 68).

Nell'analisi di Castoldi (2011), invece, nei decenni successivi alla prospettiva comportamentista, il concetto di competenza si evolve in tre direzioni che sono così sintetizzabili:

> • *dal semplice al complesso*: quando la competenza non è riducibile ad un insieme di prestazioni atomiche e separate, bensì tende ad essere pensata come una integrazione delle risorse possedute dall'individuo, che comporta l'attivazione di conoscenze, abilità e disposizioni personali relative sia al piano cognitivo, sia al piano socio-emotivo e volitivo. La sua espressione richiede di mettere in gioco e mobilitare la globalità della persona nelle sue molteplici dimensioni, non può ridursi a prestazioni isolate e delimitate;
>
> • dall'esterno all'interno: l'analisi della competenza richiede di andare oltre i comportamenti osservabili e di prestare attenzione alle disposizioni interne del soggetto e alle modalità con cui esso si avvicina allo svolgimento di un compito operativo. In questa direzione si colloca la distinzione di origine chomskiana tra "competenza", intesa come qualità interna del soggetto, e "prestazione", intesa come comportamento osservabile;
>
> • dall'astratto al situato: la competenza non è riducibile ad un concetto astratto e generale bensì tende a riferirsi alla capacità di affrontare compiti in specifici contesti culturali, sociali, operativi. Il richiamo a specifici compiti evidenzia sempre più la dimensione contestualizzata della competenza, riconducibile ad un impiego del proprio sapere in situazioni concrete ed in rapporto a scopi definiti. (pp.21-22)

Anche Le Boterf (1995), d'altro canto, riassume molto efficacemente il percorso di sviluppo che ha contraddistinto il concetto di competenza, il passaggio dalle competenze alla competenza e dai 3 savoir (sapere, saper fare e saper essere) all'unico saper agire (e reagire).

> La competenza non è uno stato od una conoscenza posseduta. Non è riducibile né a un sapere, né a ciò che si è acquisito con la formazione. [...] La competenza non risiede nelle risorse (conoscenze, capacità) da mobilizzare, ma nella mobilizzazione stessa di

> queste risorse. [...]. Qualunque competenza è finalizzata (o funzionale) e contestualizzata: essa non può dunque essere separata dalle proprie condizioni di "messa in opera". [...] La competenza è un saper agire (o reagire) riconosciuto. Qualunque competenza, per esistere, necessita del giudizio altrui (Le Boterf, 1998).

In tale visione il saper agire si scompone in tre componenti: *saper mobilitare* cioè mettere in campo le risorse necessarie, eventualmente trasformandole per adattarle alla nuova situazione; *saper integrare* cioè rendere vecchie e nuove conoscenze coese e interrelate; *saper trasferire* cioè saper utilizzare le risorse acquisite in situazioni nuove e mai affrontate prima.

L'apporto del costrutto della competenza nella rappresentazione del sapere, in rapporto a concetti più tradizionalmente scolastici come quelli di conoscenza e abilità, può rilevarsi attraverso le seguenti transizioni:

> "il passaggio da una visione statica, prevalente nei concetti di conoscenza e abilità che ci richiamano il possesso di un certo repertorio di saperi a disposizione del soggetto, ad una visione dinamica del sapere, veicolato dal concetto di competenza che ci richiama una mobilitazione di saperi in vista di un certo scopo, un saper agire insomma;
> • il passaggio da un approccio analitico, orientato verso una scomposizione progressiva del sapere nei suoi componenti più elementari (basti pensare agli sterminati elenchi di conoscenze e abilità propri della pedagogia per obiettivi…), ad un approccio olistico al sapere, riconoscibile nella visione della competenza come integrazione delle risorse dell'individuo e rappresentato nella struttura a cerchi concentrici del modello proposto);
> • il passaggio da un sapere decontestualizzato, veicolato dai concetti di conoscenza e abilità che ci restituiscono un sapere astratto, non rapportato a contesti specifici (ad esempio il saper fare una moltiplicazione o conoscere le tabelline) e potenzialmente inerte, ad un sapere situato, riferito ad un determinato contesto operativo in cui agire. Un'ulteriore espansione del concetto di competenza si ha negli anni Novanta, quando il mondo del lavoro richiede agli individui di saper agire professionalmente, superando il saper svolgere delle mansioni in modo funzionale ricercando nel lavoratore la flessibilità e la capacità di adeguarsi a differenti ruoli. (Castoldi, 2011, p.24).

All'inizio degli anni novanta Gian Piero Quaglino (1990) utilizza una rappresentazione triangolare per indicare un modello di competenza, in particolare di tipo gestionale. Ai vertici del triangolo ci sono: conoscenze, cioè sapere specifico richiesto dalla professione; capacità, cioè abilità professionali connesse allo svolgimento dell'attivita di lavoro e all'utilizzo del bagaglio di conoscenze; qualità, cioè doti personali, comunque indispensabili sia nell'implementare le capacità sia nell'orientare i comportamenti organizzativi. Ciascuno di questi riferimenti viene poi a sua volta esplicitato progressivamente. A esempio, le qualità vengono

articolate in qualità operative, sociali e soggettive e queste ultime in qualità soggettive di equilibrio, di creatività, di flessibilità al cambiamento.

Sulla natura complessa della competenza, Richard Wittorski (1998) propone un'analisi che individua cinque componenti:

- *cognitive* comprendenti le conoscenze del soggetto, il modo in cui le rappresenta, le teorie di riferimento, gli schemi d'azione, la modalità con cui si attribuisce di significato a problemi e contesti, etc.;
- *affettive*, quindi tutto ciò che comprende la sfera del se, della motivazione e dell'emozione;
- *sociali*, riconoscimento delle competenze sia da parte del contesto d'azione immediato, sia da parte dell'organizzazione d'appartenenza;
- *culturali* ovvero il quadro di riferimento in cui acquista significato e valore una competenza
- *prasseologiche*, che rinvia all'aspetto visibile della competenza, ovvero alle prestazioni, che possono diventare anche oggetto di valutazione.

Nel 1997 anche l'ISFOL sviluppa il concetto di competenza articolandolo in tre macrocategorie:

- competenze di base: competenze nella lingua madre e nella lingua straniera, nel campo dell'informatica, competenze scientifiche e matematiche, problem solving ecc.;
- competenze professionali: più strettamente legate a specifici contesti professionali (tecnologiche, commerciali, giuridiche ecc.);
- competenze trasversali: identificate come diagnosticare, relazionarsi, affrontare ecc.

e la definisce come "*l'insieme dei saperi tecnici, ossia i saperi legati a una determinata attività professionale, di capacità d'azione e di capacità procedurali che rendono l'individuo in grado di adattare la propria competenza all'evoluzione del contesto professionale e sociale*" (Isfol, 1997, p. 18).

1.2 Definizione di competenza

L'analisi evolutiva del concetto di competenza, consente di affermare che esso non ha avuto una definizione univoca e completa nel corso del tempo e, ancora oggi, assume un significato diverso a seconda del contesto, della cultura in cui viene utilizzato, delle teorie di riferimento, ma nella maggior parte dei casi è data grande importanza alla contestualizzazione, ovvero al fatto che una competenza è tale se attivata in un contesto specifico.

La letteratura sul costrutto della competenza (Coggi &Notti, 2002; Lucisano & Corsini, 2015; Pellerey, 2010; Perrenoud, 2003), però è sicuramente concorde nell'affermare come quest'ultima, più che al semplice saper fare, rimandi soprattutto ad un saper agire situato, frutto della mobilitazione di molteplici risorse, interne ed esterne al soggetto, da applicare in specifici contesti d'azione mediante la realizzazione di compiti sia operativi che intellettuali. (Capperucci, 2018).

La prima teorizzazione sul tema delle competenze si deve allo psicologo statunitense Mc. Clelland il quale ne formulò una prima definizione. Alla fine degli anni '60 egli viene incaricato di occuparsi di riprogettare la selezione di alcuni funzionari diplomatici e introduce il termine competenza in merito alla opportunità di usare, al posto dei test di intelligenza, la valutazione della competenza per la selezione del personale, ritenendo che lo sfondo motivazionale al successo e al potere sono i fondamenti della vita lavorativa.

Spencer e Spencer, allievi di McClelland, hanno definito le competenze come "*una caratteristica intrinseca individuale che è causalmente collegata a una performance efficace/o superiore in una mansione o in una situazione, e che è misurata sulla base di un criterio prestabilito*" (Spencer &Spencer, 1993, p.30), individuando una possibile articolazione in cinque componenti:

- *motivazioni* (spinte interiori che inducono ad agire per il conseguimento di determinati obiettivi);

- *tratti* (disposizioni a comportarsi o a reagire in un determinato modo);
- *immagine di sé* (atteggiamenti e valori personali);
- *conoscenza di discipline o argomenti specifici* (contenuti professionali indispensabili per svolgere un'attività)
- *skills* (capacità di eseguire un compito intellettivo o fisico).

Spencer & Spencer (1993) hanno proposto di rappresentare la competenza come un *iceberg* (*Fig. 1.1*), mettendo in evidenza la duplicità della natura delle componenti: una componente esplicita e visiva che viene espressa attraverso le prestazioni osservabili riguardo al patrimonio di conoscenze e abilità possedute dal soggetto; una componente "invisibile", implicita, che esige un'esplorazione di dimensioni interiori connesse ai processi motivazionali e socio-emotivi dell'individuo. Le conoscenze e le skill rimandano ai saperi specialistici e alle abilità che intervengono in un'azione e, quindi, osservabili perché in superficie. Invece, le prime tre componenti (l'immagine di sé, i tratti e le motivazioni) sono sommerse in quanto attengono alle parti più intime del soggetto e, perciò, non facilmente osservabili.

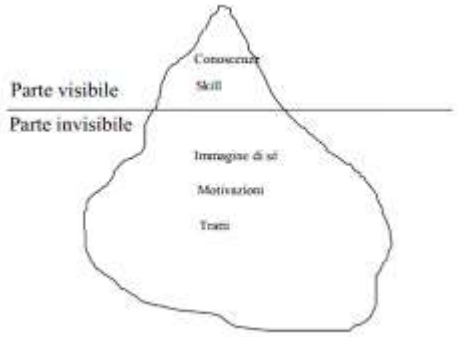


Fig. 1.1: L'iceberg della competenza (Spencer & Spencer, 1993)

Un efficace contributo è fornito da Pellerey (2004) che definisce la competenza come

> la capacità di far fronte a un compito o a un insieme di compiti, riuscendo a mettere in moto e a orchestrare le proprie risorse interne, cognitive, affettive e volitive e a utilizzare quelle esterne disponibili in modo coerente e fecondo (p.7)

La definizione evidenzia attributi essenziali della competenza quali:

- il riferimento alla capacità di far fronte ad un compito che sottintende l'utilizzazione del proprio sapere per far fronte a situazioni problematiche;
- l'impiego organizzato delle proprie risorse interne non limitandole alla sola dimensione cognitiva ma estendendole anche a quelle di natura motivazionale, attribuzionale, socioemotiva e metacognitiva;
- l'utilizzo delle risorse esterne disponibili nel contesto d'azione integrandole con le risorse interne in maniera fruttuosa.

Il comportamento competente dell'uomo non è reazione a uno stimolo ma è caratterizzato dalla intenzione di agire per un fine da raggiungere.

Un'altra interessante definizione è quella elaborata dalla Coggi (2005) in campo educativo che definisce

> ...la competenza come: un sistema di conoscenze (dichiarative, procedurali e contestuali o condizionali), organizzato, anche attraverso la metacognizione, in schemi operativi (o reti o piani) finalizzati a identificare e risolvere, autonomamente con rapidità e sicurezza, e con parziali adattamenti delle strategie, una famiglia di problemi con un'azione efficace (..) impegnandosi in una autoregolazione dell'attività cognitiva (metacognizione) e motivazionale (volizione)" (p. 28).

In primo luogo si indica il sistema di conoscenze possedute dal soggetto, definite *conoscenze dichiarative* quando utilizzano come unica fonte d'informazione la mente del soggetto, comprendono termini, concetti, teorie, etc., riguardano quindi esclusivamente quello che "il soggetto sa"; *conoscenze procedurali* che includono i processi moto-sensoriali inconsci, ovvero le modalità con cui si mette in atto un'azione, quello che "il soggetto sa fare"; infine le *conoscenze contestuali o condizionali* che concernono le situazioni in cui è opportuno mettere in pratica o meno una determinata azione. Per fornire delle conoscenze necessarie a strutturare delle competenze è utile che il sistema formativo non si focalizzi su un apprendimento di tipo quantitativo, prettamente nozionistico, ma è opportuno che operi una selezione dei contenuti base che siano il punto di partenza per la costruzione di nuove conoscenze e per la soluzione di problemi maggiormente versatili, che insegnino a gestire al meglio le conoscenze apprese. La conoscenza diviene quindi la base dell'agire e il primo passo per formare la competenza, oltre a ciò è necessario imparare a mobilitare le proprie conoscenze per trovare quelle pertinenti al problema incontrato e utili a fornire una risposta, che permettano

quindi di pianificare la risoluzione del problema, considerato nei suoi vari momenti, e mettere in atto quanto progettato. Altro aspetto che emerge dalla definizione concerne la metacognizione, intesa come conoscenza che il soggetto ha del proprio funzionamento cognitivo e di quello altrui. La metacognizione consente la consapevolezza del lavoro svolto o che si sta per svolgere.

La scuola può stimolare i processi metacognitivi stimolando gli allievi a lavorare per soluzioni alternative, non applicando strategie già consolidate. In questo modo gli studenti impareranno ad operare delle riflessioni sulle soluzioni proposte ai vari problemi rilevandone pregi e difetti, ricercando costantemente, attraverso un processo di ipotesi e verifica, soluzioni maggiormente valide.

Ulteriore elemento da analizzare è il concetto di schema d'azione ovvero dei piani operativi che si adoperano per giungere alla soluzione di un problema, i quali devono caratterizzarsi per rapidità ed automaticità, potenza, originalità.

La rapidità e l'automaticità riguardano il tempo impiegato nella risoluzione di un problema. La risposta può essere immediata nel caso in cui, il soggetto è pienamente competente per cui la mobilitazione delle risorse è stata automatizzata, o può essere lenta, quando l'elaborazione della risposta richiede un processo di riflessione, studio e pratica, in questo caso il soggetto si trova in un momento formativo, sta costruendo la sua competenza.

La potenza di uno schema concerne la capacità di trovare soluzione efficace al problema in maniera autonoma, applicando sia strategie già apprese sia ricercando le informazioni mancanti per risolvere problemi nuovi o imprevisti.

La creatività deriva dal fatto che una volta acquisito un modo di agire questo verrà perfezionato costantemente, sperimentando soluzioni innovative.

Il tempo di risposta, la potenza e l'originalità dipendono dalla differenza che intercorre fra il principiante che ricerca attivamente strategie di soluzione e l'esperto che pur avendo una soluzione collaudata può scegliere di modificarla creativamente al fine di renderla più efficace ed efficiente.

Come afferma la Coggi (2005) gli schemi d'azione devono essere:

> "chiari, sicuri, facilmente ripercorribili, (..) costruiti da chi risolve il problema, non semplice applicazione di strategie apprese (..). Il competente per essere tale deve

> risolvere problemi rapidamente categorizzati: il competente, per essere tale, per risolvere le questioni, deve riconoscerle in certo senso come familiari" (p. 36).

L'insegnamento tradizionale si caratterizza per fornire al soggetto una serie di apprendimenti, lasciando al singolo la responsabilità di comprendere come utilizzarli. Un insegnamento per competenze deve andare oltre la semplice ripetizione nozionista, richiedendo agli studenti di dare significato a ciò che apprendono e di utilizzare le proprie conoscenze. Maggiormente gli studenti sfruttano le proprie conoscenze per risolvere problemi maggiormente affinano i propri schemi d'azione.

Un ulteriore elemento caratterizzante la competenza è l'autonomia nella risoluzione dei problemi. Tutte le caratteristiche precedenti danno al soggetto le informazioni e gli strumenti necessari per risolvere un problema in autonomia, in quanto anche se il competente necessita di ulteriori informazioni riesce a reperirle agevolmente ricorrendo a fonti autorevoli. Pertanto gli studenti che ambiscono a maturare una competenza devono abituarsi a trovare strategie di soluzione allo stesso problema che si presenta in contesti differenti e a reperire ulteriori informazioni per problemi che richiedono conoscenze ancora non apprese.

Tutto quello affermato finora presuppone che il competente sia in grado di mobilitare le proprie conoscenze. La mobilitazione è il processo che implica il riuscire ad utilizzare le conoscenze acquisite in maniera automatica, con rapidità e sicurezza e che si estende alle componenti motivazionali, sociali, emotive e metacognitive.

1.3 La competenza nello scenario normativo internazionale.

Nel 1993 l'Organizzazione mondiale della sanità (OMS), a seguito dell'aumento della dipendenza giovanile da sostanze psicotrope (alcool, tabacco, droghe), intervenne con il documento *Life Skills Education in Schools*, con il quale invitava le "*agenzie formative a promuovere una formazione in grado di attrezzare i giovani ad affrontare le difficoltà della vita nell'ambito di una maturazione globale della persona e del cittadino*" (Castoldi, 2011, p. 32).

Sarà in un documento successivo del 1999 che l'OMS individuerà dieci life skills riformulate in chiave di abilità psicosociale cioè un insieme di abilità personali e relazionali che servono per governare i rapporti con il resto del mondo e per affrontare positivamente la vita quotidiana, «competenze sociali e relazionali che permettono ai ragazzi di affrontare in modo efficace le esigenze della vita quotidiana, rapportandosi con fiducia a se stessi, agli altri e alla comunità», abilità e competenze «che è necessario apprendere per mettersi in relazione con gli altri e per affrontare i problemi, le pressioni e gli stress della vita quotidiana. La mancanza di tali skills socio-emotive può causare, in particolare nei giovani, l'instaurarsi di comportamenti negativi e a rischio in risposta agli stress.

L'OMS, in particolare, individua le seguenti capacità:

- capacità di leggere dentro sé stessi (Autocoscienza);
- capacità di riconoscere le proprie emozioni e quelle degli altri (Gestione delle emozioni);
- capacità di governare le tensioni (Gestione dello stress);
- capacità di analizzare e valutare le situazioni (Senso critico);
- capacità di prendere decisioni (Decision making);
- capacità di risolvere problemi (Problem solving);
- capacità di affondare in modo flessibile ogni genere di situazione (Creatività);
- capacità di esprimersi (Comunicazione efficace);
- capacità di comprendere gli altri (Empatia);
- capacità di interagire e relazionarsi con gli altri in modo positivo (Skill per le relazioni interpersonali).

In Europa, invece, alla luce dei problemi occupazionali emergenti, nel 1993 viene pubblicato il primo Libro Bianco redatto con il coordinamento di Jacques Delors, di cui il rapporto porta il nome, nel quale, tra gli obiettivi per favorire la crescita, la competitività e l'occupazione vi è anche "*quello di puntare sull'istruzione e la formazione lungo tutto l'arco della vita, al fine di sviluppare l'attitudine ad apprendere, a comunicare, a lavorare in gruppo, nonché ad adeguare*

continuamente il know-how e la formazione dei cittadini/lavoratori." (Marzano, 2013, p.76)

Il concetto di scuola che si evince dal rapporto Delors è ben racchiuso nella convinzione dell'autore che l'apprendimento racchiuda (o disveli) un tesoro, come ben esplicitato nel titolo *"Learning: the treasure within"* (tradotto in italiano con Nell'educazione un tesoro, 1997). In tal senso la scuola ha il dovere di promuovere quattro tipi fondamentali di apprendimento tra loro interconnessi su cui basare l'azione educativa e la missione della scuola stessa:

1. Imparare a conoscere, cioè acquisire gli strumenti della comprensione.
2. Imparare a fare, in modo tale da essere capaci di agire creativamente nel proprio ambiente.
3. Imparare a vivere insieme in modo da partecipare e collaborare attivamente all'interno di un contesto fatto di relazioni comunitarie
4. Imparare ad essere, un percorso che deriva dall'evoluzione degli altri tre.

Nel 1997, più che un riferimento normativo, prende vita un progetto lanciato dall'OCSE sulla "Definizione e Selezione delle Competenze" (DeSeCo) che, affidandosi alle opinioni di un'ampia gamma di esperti, concentra la sua riflessione su ciò che dovrebbero essere le competenze di base per la società della conoscenza al fine di fornire una solida struttura di base su cui condurre indagini internazionali di accertamento degli apprendimenti e delle competenze chiave necessarie per la vita adulta.

Sulla scia delle direttive del progetto DeSeCo, nel 2006 il Parlamento Europeo e il Consiglio dell'Unione Europea emana la Raccomandazione del 18 dicembre in cui vengono individuate otto competenze chiave essenziali per ciascun individuo in una società della conoscenza. La Raccomandazione esorta i governi dell'UE affinché l'insegnamento e l'apprendimento di competenze chiave siano parte integrante delle loro strategie di apprendimento permanente. Le competenze individuate sono:

1. *comunicazione nella madrelingua*: la comunicazione nella madrelingua è la capacità di esprimere e interpretare concetti, pensieri, sentimenti, fatti e opinioni in forma sia orale sia scritta (comprensione orale, espressione orale, comprensione scritta ed espressione scritta) e di interagire

adeguatamente e in modo creativo sul piano linguistico in un'intera gamma di contesti culturali e sociali, quali istruzione e formazione, lavoro, vita domestica e tempo libero;

2. *comunicazione nelle lingue straniere*: come la comunicazione nella madrelingua, ma comprende abilità di mediazione (ossia riassumere, parafrasare, interpretare o tradurre) e di comprensioni interculturale;
3. *competenza matematica e competenze di base in scienza e tecnologia*: la competenza matematica è l'abilità di sviluppare e applicare il pensiero matematico per risolvere una serie di problemi in situazioni quotidiane. Partendo da una solida padronanza delle competenze aritmetico matematiche, l'accento è posto sugli aspetti del processo e dell'attività oltre che su quelli della conoscenza. La competenza matematica comporta, in misura variabile, la capacità e la disponibilità a usare modelli matematici di pensiero (pensiero logico e spaziale) e di presentazione (formule, modelli, costrutti, grafici, carte). La competenza in campo scientifico si riferisce alla capacità e alla disponibilità a usare l'insieme delle conoscenze e delle metodologie possedute per spiegare il mondo che ci circonda sapendo identificare le problematiche e traendo le conclusioni che siano basate su fatti comprovati. La competenza in campo tecnologico è considerata l'applicazione di tale conoscenza e metodologia per dare risposta ai desideri o bisogni avvertiti dagli esseri umani. La competenza in campo scientifico e tecnologico comporta la comprensione dei cambiamenti determinati dall'attività umana e la consapevolezza della responsabilità di ciascun cittadino;
4. *competenza digitale*: la competenza digitale consiste nel saper utilizzare con dimestichezza e spirito critico le tecnologie della società dell'informazione (TSI) per il lavoro, il tempo libero e la comunicazione. Essa è supportata da abilità di base nelle TIC: l'uso del computer per reperire, valutare, conservare, produrre, presentare e scambiare informazioni nonché per comunicare e partecipare a reti collaborative tramite Internet;
5. *imparare a imparare*: è l'abilità di perseverare nell'apprendimento, di organizzare il proprio apprendimento anche mediante una gestione efficace

del tempo e delle informazioni, sia a livello individuale che in gruppo. Questa competenza comprende la consapevolezza del proprio processo di apprendimento e dei propri bisogni, l'identificazione delle opportunità disponibili e la capacità di sormontare gli ostacoli per apprendere in modo efficace. Questa competenza comporta l'acquisizione, l'elaborazione e l'assimilazione di nuove conoscenze e abilità come anche la ricerca e l'uso delle opportunità di orientamento. Il fatto di imparare a imparare fa sì che i discenti prendano le mosse da quanto hanno appreso in precedenza e dalle loro esperienze di vita per usare e applicare conoscenze e abilità in tutta una serie di contesti: a casa, sul lavoro, nell'istruzione e nella formazione. la motivazione e la fiducia sono elementi essenziali perché una persona possa acquisire tale competenza;

6. *competenze sociali e civiche*: queste includono competenze personali, interpersonali e interculturali e riguardano tutte le forme di comportamento che consentono alle persone di partecipare in modo efficace e costruttivo alla vita sociale e lavorativa, in particolare alla vita in società sempre più diversificate, come anche a risolvere i conflitti ove ciò sia necessario. La competenza civica dota le persone degli strumenti per partecipare appieno alla vita civile grazie alla conoscenza dei concetti e delle strutture sociopolitici e all'impegno a una partecipazione attiva e democratica;
7. *spirito di iniziativa e imprenditorialità*: concernono la capacità di una persona di tradurre le idee in azione. In ciò rientrano la creatività, l'innovazione e l'assunzione di rischi, come anche la capacità di pianificare e di gestire progetti per raggiungere obiettivi. È una competenza che aiuta gli individui, non solo nella loro vita quotidiana, nella sfera domestica e nella società, ma anche nel posto di lavoro, ad avere consapevolezza del contesto in cui operano e a poter cogliere le opportunità che si offrono ed è un punto di partenza per le abilità e le conoscenze più specifiche di cui hanno bisogno coloro che avviano o contribuiscono ad un'attività sociale o commerciale. Essa dovrebbe includere la consapevolezza dei valori etici e promuovere il buon governo;
8. *consapevolezza ed espressione culturale*: consapevolezza dell'importanza

dell'espressione creativa di idee, esperienze ed emozioni in un'ampia varietà di mezzi di comunicazione, compresi la musica, le arti dello spettacolo, la letteratura e le arti visive. capacità di apprezzare l'importanza creativa di idee, esperienze ed emozioni espresse tramite una varietà di mezzi quali la musica, la letteratura e le arti visive e dello spettacolo.

Altra fonte importante nella cornice normativa internazionale è rappresentato dalla Raccomandazione del Parlamento Europeo e del Consiglio del 23 aprile 2008, definita Quadro Europeo delle Qualifiche (EQF). Lo scopo che il documento si prefigge è fondere e rendere comparabili i titoli di studio rilasciati nei vari paesi europei fornendo le linee guida per la valutazione e la certificazione delle competenze. Nella Raccomandazione i livelli di apprendimento, sono costituiti in termini di conoscenze, abilità, competenze. Ciascuno di questi concetti viene definito nel seguente modo:

- *Conoscenze*: risultato dell'assimilazione di informazioni attraverso l'apprendimento. Le conoscenze sono un insieme di fatti, principi, teorie e pratiche relative ad un settore di lavoro o di studio. Le conoscenze sono descritte come teoriche e/o pratiche;
- *Abilità*: indicano le capacità di applicare conoscenze e di utilizzare know-how per portare a termine compiti e risolvere problemi. Le abilità sono descritte come cognitive (comprendenti l'uso del pensiero logico, intuitivo e creativo) o pratiche (comprendenti l'abilità manuale e l'uso di metodi, materiali, strumenti);
- *Competenze*: comprovata capacità di utilizzare conoscenze, abilità e capacità personali, sociali e/o metodologiche, in situazioni di lavoro o di studio e nello sviluppo professionale e personale. Le competenze sono descritte in termini di responsabilità e autonomia.

Analizzando la definizione occorre evidenziare che:

- la conoscenza non è sinonimo di contenuto perché non tutti i contenuti diventano conoscenze cioè patrimonio assimilato in maniera permanente dalla persona ma appunto è «risultato dell'assimilazione di informazioni attraverso l'apprendimento»;
- l'abilità rimanda al saper come (know – how), cioè alla conoscenza del processo

di come operare in un determinato settore in quanto le abilità, cognitive o pratiche, possono essere estremamente complesse e richiedere, quindi, grande preparazione alla persona che le impiega per gestire situazioni e risolvere problemi;

- la competenza è descritta come comprovata (cioè manifestata da evidenze), capacità di utilizzare conoscenze, abilità e capacità personali, sociali e/o metodologiche nei più diversi contesti di vita, di studio e di lavoro. Essa non risiede, perciò, nel possesso di un grosso stock di risorse ma è un "sapere agito", che si manifesta con la mobilitazione efficace delle risorse di cui si dispone per affrontare al meglio una situazione contingente da cui il termine anche di "competenza situata" (Trinchero, 2017, p. 5).

La competenza, quindi, a differenza, dell'abilità non è legata alla profonda conoscenza di una procedura o di un processo, ma è caratteristica della persona la quale, anche in mancanza di informazioni o saperi specifici, è capace di mobilitare abilità, capacità personali, sociali, metodologiche, metacognitive per affrontare la situazione, in caso di problemi legati sia al contesto personale sia a quello professionale; è capacità di affrontare situazioni slegate dalle situazioni note, generalizzando, trasferendo, creando nessi tra conoscenze e abilità possedute rispetto ad altri contesti, costruendone di nuove. E, infine, la competenza è sostanziata, da responsabilità e autonomia, un binomio inscindibile nella formazione dei giovani nella scuola. L'autonomia di cui si parla non è soltanto la capacità di affrontare le situazioni da soli, senza che qualcuno ci dica cosa e come fare, ma significa prendere decisioni e agire in modo indipendente, distaccandosi, se e quando necessario, dai modelli presi a riferimento e riflettendo criticamente su di essi (ivi, p.6). Ecco perché l'autonomia è sempre accompagnata dalla responsabilità. L'agire autonomo è un'assunzione di responsabilità in relazione al proprio comportamento.

1.4 I riferimenti normativi nazionali

La nozione di competenza, insieme alla procedura della sua certificazione, entra a far parte del lessico scolastico italiano verso la fine degli scorsi anni '90. Per la prima volta, ma al di fuori del primo ciclo, nella legge n. 425/1997, che istituisce il

nuovo esame di Stato conclusivo dei corsi di istruzione secondaria superiore si parla di competenze. Per il primo ciclo, e per tutto il sistema educativo di istruzione e di formazione, i primi riferimenti si trovano invece nel Regolamento dell'autonomia scolastica di cui al DPR n. 275/1999. Esso fissa per le scuole «l'obbligo di adottare procedure e strumenti di verifica e valutazione della produttività scolastica e del raggiungimento degli obiettivi», e, a tal fine, fin dall'inizio, all'art.10, fissa l'istituzione di una procedura di rilevazione, al cui interno si colloca anche la previsione di «nuovi modelli per le certificazioni, le quali indicano le conoscenze, le competenze, le capacità acquisite e i crediti formativi riconoscibili».

La legge n. 53/2003, istituendo l'attuale sistema educativo di istruzione e formazione, si fa carico dell'esigenza di certificazione, limitandola però alle sole competenze (art. 3, c. 1, lett. a) e successivamente il regolamento attuativo per il primo ciclo, D. Lgs n. 59/2004, conferma tale obiettivo con distinte forme di certificazione delle competenze nella scuola primaria (art. 8, c. 1) e nella scuola secondaria di primo grado (art. 11, c. 2). In entrambi i casi, in attesa della modulistica nazionale, si rimette temporaneamente alle singole scuole l'elaborazione dei rispettivi modelli di certificazione.

Con il DM n. 139/2007 che sancisce la normativa sul nuovo obbligo di istruzione e con il DM n. 254/2012 – Indicazioni Nazionali per il curriculo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo di istruzione viene introdotto nel sistema scolastico italiano il concetto di competenza situata.

Nel documento tecnico allegato al DM n. 139/2007, recependo le direttive della Raccomandazione del Parlamento europeo e del Consiglio del 18 dicembre 2006, declina le otto competenze chiave europee nelle *Competenze chiave di cittadinanza* di seguito elencate:

1. *Imparare ad imparare*: organizzare il proprio apprendimento, individuando, scegliendo ed utilizzando varie fonti e varie modalità di informazione e di formazione (formale, non formale ed informale), anche in funzione dei tempi disponibili, delle proprie strategie e del proprio metodo di studio e di lavoro.
2. *Progettare*: elaborare e realizzare progetti riguardanti lo sviluppo delle

proprie attività di studio e di lavoro, utilizzando le conoscenze apprese per stabilire obiettivi significativi e realistici e le relative priorità, valutando i vincoli e le possibilità esistenti, definendo strategie di azione e verificando i risultati raggiunti.

3. *Comunicare o comprendere messaggi di genere diverso* (quotidiano, letterario, tecnico, scientifico) e di complessità diversa, trasmessi utilizzando linguaggi diversi (verbale, matematico, scientifico, simbolico, ecc.) mediante diversi supporti (cartacei, informatici e multimediali) o rappresentare eventi, fenomeni, principi, concetti, norme, procedure, atteggiamenti, stati d'animo, emozioni, ecc. utilizzando linguaggi diversi (verbale, matematico, scientifico, simbolico, ecc.) e diverse conoscenze disciplinari, mediante diversi supporti (cartacei, informatici e multimediali).
4. *Collaborare e partecipare*: interagire in gruppo, comprendendo i diversi punti di vista, valorizzando le proprie e le altrui capacità, gestendo la conflittualità, contribuendo all'apprendimento comune ed alla realizzazione delle attività collettive, nel riconoscimento dei diritti fondamentali degli altri.
5. *Agire in modo autonomo e responsabile*: sapersi inserire in modo attivo e consapevole nella vita sociale e far valere al suo interno i propri diritti e bisogni riconoscendo al contempo quelli altrui, le opportunità comuni, i limiti, le regole, le responsabilità.
6. *Risolvere problemi*: affrontare situazioni problematiche costruendo e verificando ipotesi, individuando le fonti e le risorse adeguate, raccogliendo e valutando i dati, proponendo soluzioni utilizzando, secondo il tipo di problema, contenuti e metodi delle diverse discipline.
7. *Individuare collegamenti e relazioni*: individuare e rappresentare, elaborando argomentazioni coerenti, collegamenti e relazioni tra fenomeni, eventi e concetti diversi, anche appartenenti a diversi ambiti disciplinari, e lontani nello spazio e nel tempo, cogliendone la natura sistemica, individuando analogie e differenze, coerenze ed incoerenze, cause ed effetti e la loro natura probabilistica.
8. *Acquisire ed interpretare l'informazione*: acquisire ed interpretare

criticamente l'informazione ricevuta nei diversi ambiti ed attraverso diversi strumenti comunicativi, valutandone l'attendibilità e l'utilità, distinguendo fatti e opinioni.

Il raggiungimento e lo sviluppo delle competenze chiave di cittadinanza avviene attraverso l'integrazione, il collegamento e la relazione tra i saperi e le competenze contenute nei quattro assi culturali stabiliti nello stesso DM n. 139/2007:

- *Asse dei linguaggi:* le competenze linguistiche e comunicative sono patrimonio comune a tutti i contesti di apprendimento e costituiscono una cornice di riferimento culturale generale per i saperi afferenti sia ai quattro assi culturali, sia alle discipline di indirizzo.
- *Asse matematico*: è mirato all'acquisizione di saperi e competenze che pongono lo studente nelle condizioni di acquisire una corretta capacità di giudizio, sapersi orientare consapevolmente nel mondo contemporaneo applicando i principi e i processi matematici di base, per sviluppare la coerenza logica delle argomentazioni proprie e altrui.
- *Asse scientifico tecnologico*: esso rende gli studenti consapevoli dei legami tra scienza e tecnologia, della loro correlazione con il contesto culturale e sociale, con i modelli di sviluppo e la salvaguardia dell'ambiente.
- *Asse storico sociale*: contribuisce a riconoscere, nell'evoluzione dei processi produttivi, le componenti scientifiche, economiche, tecnologiche e artistiche che li hanno determinati nel corso della storia, con riferimento sia ai diversi contesti, locali e globali, sia ai mutamenti delle condizioni di vita.

La legge n. 169/2008, art. 3, nel quadro di un intervento complessivo sulle modalità di valutazione scolastica dà nuovo rilievo alla procedura di certificazione delle competenze estendendo anche ad essa l'uso del voto numerico in decimi al termine della scuola primaria e al termine della secondaria di primo grado. La medesima legge prevede l'emanazione di un Regolamento che coordini le norme vigenti in materia di valutazione degli studenti.

Il Regolamento della valutazione, richiesto dalla legge n. 169/2008, è emanato con DPR n. 122/2009. Esso dedica l'intero articolo 8 alla certificazione delle competenze, prevedendo che le competenze al termine della scuola primaria siano

«descritte e certificate», e che al termine della scuola secondaria di primo grado siano «accompagnate anche da valutazione in decimi». Più in generale, le certificazioni delle competenze relative ai diversi ordini e gradi di istruzione devono tenere conto anche delle indicazioni fornite dall'INVALSI e dalle principali rilevazioni internazionali.

Con il DM n. 9/2010 è emanato un modello di certificazione che prevede la valutazione dei livelli di competenza raggiunti nell'assolvimento dell'obbligo di istruzione.

Il D.M. n. 211/2010 (*Indicazioni nazionali riguardanti gli obiettivi specifici di apprendimento concernenti le attività e gli insegnamenti compresi nei piani degli studi previsti per i percorsi liceali,* la Direttiva n. 57/2010 (*Linee guida per il passaggio al nuovo ordinamento degli istituti tecnici)* e la Direttiva n. 65/2010 (*Linee guida per il passaggio al nuovo ordinamento degli istituti professionali*) definiscono il rapporto tra conoscenze e competenze disciplinari e il ruolo delle singolo discipline nell'acquisizione delle competenze.

Si deve poi ricordare la costituzione di uno specifico Sistema nazionale di certificazione delle competenze, regolamentato dal D. Lgs n. 13/2013, che riconosce anche alle scuole, insieme ad altri enti pubblici titolari o enti titolati, il compito di certificare «le competenze acquisite dalla persona in contesti formali, non formali o informali, il cui possesso risulti comprovabile attraverso riscontri e prove» (art. 3, c. 1). Queste disposizioni riguardano direttamente solo le scuole del secondo ciclo, ma sono citate per ricordare la prospettiva in cui si inseriscono le prime certificazioni delle competenze effettuate nel corso del primo ciclo.

La delega contenuta nella legge n. 107 del 13 luglio 2015, all'articolo 1, comma 181, lett. i) prevede: "la revisione delle modalità di valutazione e certificazione delle competenze degli studenti del primo ciclo di istruzione, mettendo in rilievo la funzione formativa e di orientamento della valutazione, e delle modalità di svolgimento dell'esame di Stato conclusivo del primo ciclo".

Il Piano nazionale di formazione (DM n. 797/2016) pone tra le priorità del triennio succiso (2016-2019) i seguenti temi che si connettono alla certificazione delle competenze:

a. Didattica per competenze, innovazione metodologica e competenze di base: “La didattica per competenze rappresenta inoltre la risposta a un nuovo bisogno di formazione di giovani che nel futuro saranno chiamati sempre più ma reperire, selezionare e organizzare le conoscenze necessarie a risolvere problemi di vita personale e lavorativa;

b. Valutazione e miglioramento: “Valutazione formativa e sommativa, compiti di realtà e valutazione autentica, certificazione delle competenze. Dossier e portfolio”

Il Decreto Legislativo n. 62 del 13 aprile 2017 reca norme in materia di valutazione e certificazione delle competenze nel primo ciclo ed esami di Stato, a norma dell'articolo 1, commi 180 e 181, lettera i), della legge 13 luglio 2015, n. 107. Il Decreto legislativo dà attuazione alla delega della l. 107/15 disciplinando la valutazione nel primo ciclo di istruzione; la struttura dell’esame di Stato al termine del primo e del secondo ciclo di istruzione; la certificazione delle competenze nella scuola primaria e secondaria di primo grado; le prove nazionali INVALSI, integrate dalla prova di lingua inglese, nel primo ciclo e nell’ultimo anno del secondo. Il D. lvo 62/2017 sostituisce le disposizioni del DPR 122/09 riguardanti la valutazione nel primo ciclo di istruzione.

Il D.M. 741/2017 disciplina nel dettaglio la struttura dell’esame di Stato al termine del primo ciclo di istruzione.

Il D.M. n. 742/2017 disciplina la certificazione delle competenze al termine della scuola primaria e del primo ciclo di istruzione e licenzia i modelli nazionali di certificazione che entrano a regime nell’a.s. 2017/18. Disciplina, inoltre, la sezione integrativa predisposta da INVALSI sui livelli conseguiti dall’alunno nelle prove nazionali di italiano, matematica e inglese.

La nota ministeriale n. 1865 del 10 ottobre 2017 accompagna il D.M. 741 e il D.M. 742 con commenti, interpretazioni e note operative sul tema della valutazione nel primo ciclo, sull’esame di Stato e sulla certificazione delle competenze.

1.5 La competenza matematica

Rispetto alla concezione rigida e procedurale che spesso si accompagna

all'insegnamento scolastico tradizionale, la matematica come competenza diventa un sapere flessibile e creativo. Nel suo ruolo attivo, lo studente impara ad orientarsi e ad agire in situazioni diverse e più complesse costruendo delle conoscenze operative. Queste conoscenze si esprimono nella capacità di mobilizzare strumenti matematici per affrontare le situazioni nuove e potenzialmente problematiche, non focalizzandosi solo nella capacità di riprodurre delle procedure apprese nei classici contesti (OECD, 2006; UNESCO, 2011).

Assicurare la literacy matematica di tutti i giovani è l'ambizione fondamentale e prioritaria (UNESCO 2011). Garantire questa competenza è permettere lo sviluppo di quelle conoscenze e abilità matematiche necessarie alla partecipazione ed all'integrazione di una società che necessita di adattarsi alle evoluzioni.

Nel campo dell'Educazione Matematica molte sono le espressioni utilizzate (m*athematical competence*, *mathematical literacy*, *mathematical proficiency*, *numeracy*, *mastery of mathematics…)* che sono in qualche misura collegabili al concetto di competenza analizzato nei paragrafi precedenti.

Una delle prime occorrenze scritte del termine mathematical literacy fu nel 1944 negli Stati Uniti, quando una Commissione del Consiglio nazionale degli insegnanti di matematica (NCTM) sui piani del dopoguerra (NCTM (1970/2002), p. 244) richiese alla scuola di garantire la competenza matematica a tutti coloro che potessero eventualmente conseguirla. Poco dopo, nel 1950, il termine fu usato di nuovo nel Canadian Hope Report (NCTM 1970/2002, p. 401). Successivamente, gli standard NCTM 1989 (NCTM 1989, p. 5) parlavano di *mathematical literacy* e *mathematically literate students*. Sostanzialmente, nessuna definizione del termine si rinviene in nessuno di questi testi. Gli Standard (Programmi) del 1989, tuttavia, presentavano cinque obiettivi generali che garantissero il risultato della *mathematical literacy* a tutti gli studenti che:

- imparino ad apprezzare la matematica;
- acquisiscano fiducia nelle proprie capacità di fare matematica;
- diventino risolutori di problemi matematici;
- imparino a comunicare matematicamente;
- imparino a ragionare matematicamente (ibidem, p.5).

Altri successivi interessanti approcci all'idea di competenza sviluppatisi in ambito

matematico si possono ricondurre alle visioni di *habits of mind* (Cuoco et al. 1996), di *mathematical proficiency* (Kilpatrick et al.,2001), di *mathematical competence* (Niss, 2003; Niss & Højgaard, 2011), di *mathematical literacy* (Stacey & Turner, 2015).

Partendo da una accesa critica sull'organizzazione dei curriculum di matematica della scuola secondaria in USA, Cuoco, Goldenberg e Mark (1996), propongono dei principi, *habits of mind*, sui quali essa, invece, andrebbe incardinata. In realtà gli autori non danno una definizione esplicita di essi ma attraverso gli esempi forniti emerge che altri non sono che particolari modi di pensare, di affrontare e di disporsi ad agire nelle diverse situazioni. Il loro sviluppo dovrebbe, pertanto, costituire l'obiettivo didattico a cui, conseguentemente, orientare, l'azione didattica. In tale contesto gli studenti, secondo la proposta degli autori, dovrebbero diventare, ad esempio, *pattern snifferers, describers, tinkerers, inventors, visualizers, conjectures, guessers.* Si tratta di esempi di *habit of mind* generali di ampia portata che vanno al di là della singola disciplina, a cui, poi, sono affiancati modi di pensare e abilità più inerenti alla matematica – quali ad esempio, *mathematicians use multiple points of view* o *mathematicians mix deduction and experiment.*

Nel contesto di un progetto promosso dal National Research Council (NRC) statunitense viene elaborato il costrutto di *mathematical proficiency*. Attraverso la ricerca, scopo del progetto era elaborare raccomandazioni per l'insegnamento della matematica, la formazione degli insegnanti e la formazione dei curricula, che consentissero di migliorare la qualità dell'apprendimento di tutti gli studenti negli anni tra la scuola dell'infanzia e il grado 8 (Kilpatrick et al., 2001). Il progetto, in buona sostanza, mirava a caratterizzare quello che si può definire un apprendimento efficace della matematica (*to learn mathematics successfully*). A tal fine la m*athematical proficiency* viene definita attraverso le sue componenti (*strands*):

- *conceptual understanding:* che si riferisce alla comprensione dello studente di concetti, operazioni e relazioni matematici;
- *procedural fluency:* l'abilità dello studente di eseguire procedure matematiche in modo flessibile, accurato, efficiente e appropriato;
- *strategic competence*: la capacità dello studente di formulare, rappresentare e risolvere problemi matematici:

- *adaptive reasoning:* la capacità di pensiero logico e di elaborare riflessioni, spiegazioni e giustificazioni di argomenti matematici;
- *productive disposition*: l'inclinazione a vedere la matematica come materia sensata, utile da apprendere, unitamente alla convinzione nel valore della diligenza e della propria auto-efficacia.

"La mathematical proficiency non si raggiunge concentrandosi su una o più delle sue componenti e, pertanto, non si presenta come un tratto monodimensionale" (Kilpatrick et al., 2001, p.116). Le sue componenti che prendono in considerazione in modo esplicito sia la dimensione della conoscenza disciplinare, sia la dimensione metacognitiva (s*trategic competence*), sia, ancora la dimensione affettiva con il riferimento alla disposizione personale (*productive disposition*) sono intrecciate e interdipendenti tra loro tanto da far usare agli autori l'immagine di una treccia (Figura 1.2) per meglio comunicare il costrutto.

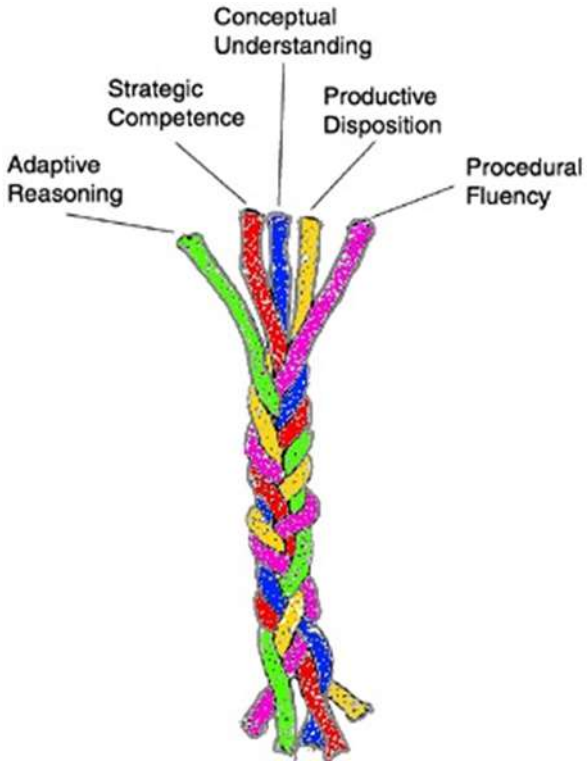


Figura 1.2: Intreccio delle componenti della mathematical proficiency in Kilpatrick et al. (2001)

Una definizione di competenza matematica si è sviluppata nell'ambito del progetto danese KOM (Niss, 2003; Niss & Højgaard, 2011). Il progetto con il nome originale *Kompetencer Og Matematiklærinè* (Competenze e Apprendimento della

Matematica) viene promosso dal Ministero dell'educazione danese tra il 2000 e il 2002 e realizzato da un gruppo di esperti che comprendeva i coordinatori Mogens Niss e Tomas Højgaard con l'obiettivo di individuare da un lato eventuali elementi di criticità del sistema educativo danese e dall'altro gli strumenti adeguati ad affrontare tali criticità in modo da favorire lo sviluppo dell'insegnamento e dell'apprendimento della matematica. In questo contesto, la nozione di mathematical competence assunta per poter definire cosa significhi "padroneggiare la matematica" a tutti i livelli scolastici, e quindi quale strumento per poter articolare la descrizione dei curricoli e dei risultati di apprendimento attesi al termine di ogni ciclo di istruzione, e per descrivere i progressi di apprendimento in matematica degli studenti attraverso i diversi livelli scolari, significa:

> *"…. the ability to understand, judge, do and use mathematics in a variety of intra- and extra-mathematical contexts and situations in which mathematics plays or could play a role". (Niss, 2003, p. 7)*

La competenza matematica secondo tale definizione si caratterizza come la capacità di capire, giudicare, fare e usare la matematica in contesti diversi (sia interni che esterni alla materia) in cui la matematica gioca un ruolo importante. Essa viene declinata in otto mathematical competencies, ognuna delle quali possiede una propria
identità, nonostante siano tutte tra di loro strettamente legate (Figura 1.3). Esse sono:

- *mathematical thinking competency*: riguarda elementi caratteristici del pensiero matematico, la consapevolezza del tipo di domande che caratterizzano l'attività matematica e del tipo di risposte che la matematica può fornire;
- *problem tackling competency*: riguarda la formulazione e soluzione di problemi di matematica con consegna aperta o chiusa, formulati da sé o da altri;
- *modelling competency*: riguarda tutti i processi di modellizzazione di situazioni extra-matematiche nonché di analisi di modelli matematici;
- *reasoning competency*: riguarda l'abilità di comprendere e produrre

argomentazioni matematiche;

- *representing competency*: riguarda l'abilità di comprendere e saper utilizzare diverse forme di rappresentazione di oggetti matematici, problemi o situazioni;
- *symbol and formalism competency*: riguarda il saper manipolare le rappresentazioni simboliche in matematica;
- *communicating competency*: riguarda l'abilità di comprendere e produrre testi scritti e orali usando i diversi registri linguistici;
- *aids and tools competency:* riguarda l'uso di strumenti di supporto per l'attività matematica quali ad esempio software, calcolatrici, riga, compasso, abaco, ecc.

Tali competenze sono suddivise in due gruppi: le prime quattro fanno riferimento alla capacità di rispondere nella, con e sulla matematica; le ultime quattro invece si riferiscono alla capacità di "manipolare" il linguaggio e gli strumenti matematici.
Ognuna delle competenze citate sopra possiede una duplice natura: quella analitica e quella produttiva. La prima consiste nell'abilità di comprendere ed esaminare aspetti dell'attività matematica condotta da altri soggetti, mentre la seconda consiste nell'abilità del soggetto di svolgere attività matematica. Anche in questo caso non vengono tenuti in considerazione gli aspetti motivazionali e affettivi.

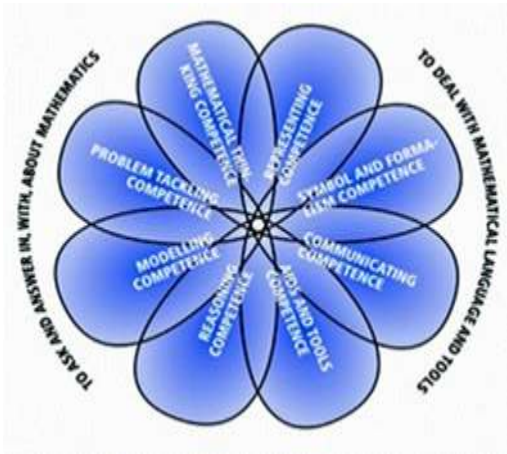


Figura 1.3: Rappresentazione della mathematical competence (Niss ,2003)

L'intero quadro del progetto KOM è stato recentemente rivisitato con l'obiettivo di aggiornare la terminologia e precisare meglio alcune definizioni pur mantenendo invariato l'impianto complessivo (Niss& Højgaard, 2019). In particolare la

competenza matematica viene ora definita come "*someone's insightful readiness to act appropriately in response to all kinds of mathematical challenges pertaining to given situations*" (Niss & Højgaard, 2019, p.12). In questa nuova formulazione emerge con maggiora chiarezza la natura sfidante delle situazioni in cui si dovrebbe manifestare la competenza e viene al contempo eliminato il riferimento (esplicito nella precedente definizione) a contesti e situazioni interni alla matematica. Da notare anche l'uso dell'espressione readiness che però vuol riferirsi esclusivamente agli aspetti cognitivi e non a quelli volitivi e affettivi (ibidem).

Il progetto KOM ha molto influenzato l'elaborazione del costrutto di "mathematical literacy", assunto nelle linee guida delle normative seguenti e cioè le Competenze chiave per l'apprendimento permanente - Raccomandazione del parlamento europeo e del consiglio del 18 dicembre 2006 e del quadro di riferimento adottato per le rilevazioni in matematica di OCSE-PISA (Stacey, Turner, 2015), le Indicazione nazionali per il curriculo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione – Decreto Ministeriale del 31 luglio 2007 e C.M. del 18 aprile 2012 e le Indicazioni nazionali per i Licei e le Linee guida per gli Istituti Tecnici e Professionali - Ministero dell'istruzione, dell'università e della ricerca del 15 marzo 2010.

Nella "Raccomandazione del Parlamento Europeo e del Consiglio dell'Unione Europea" del 22 maggio 2018 si legge la seguente definizione:

> La competenza matematica è l'abilità di sviluppare e applicare il pensiero matematico per risolvere una serie di problemi in situazioni quotidiane. Partendo da una solida padronanza delle competenze aritmetico-matematiche, l'accento è posto sugli aspetti del processo e dell'attività oltre che su quelli della conoscenza. La competenza matematica comporta, in misura variabile, la capacità e la disponibilità a usare modelli matematici di pensiero (pensiero logico e spaziale) e di presentazione (formule, modelli, schemi, grafici, rappresentazioni) (p. C 189/9)

e ne riporta le conoscenze, le abilità e le attitudini essenziali legate a tale competenza:

> La conoscenza necessaria nel campo della matematica comprende una solida conoscenza del calcolo, delle misure e delle strutture, delle operazioni di base e delle presentazioni matematiche di base, una comprensione dei termini e dei concetti matematici e una consapevolezza dei quesiti cui la matematica può fornire una risposta.
> Una persona dovrebbe disporre delle abilità per applicare i principi e processi matematici di base nel contesto quotidiano nella sfera domestica e sul lavoro nonché

> per seguire e vagliare concatenazioni di argomenti. Una persona dovrebbe essere in grado di svolgere un ragionamento matematico, di cogliere le prove matematiche e di comunicare in linguaggio matematico oltre a saper usare i sussidi appropriati. Un'attitudine positiva in relazione alla matematica si basa sul rispetto della verità e sulla disponibilità a cercare motivazioni e a determinarne la validità (ibidem).

Sebbene la competenza matematica presupponga la conoscenza della terminologia matematica e dei procedimenti, e le abilità necessarie per svolgere certe operazioni e applicare certi metodi, tale definizione mette in evidenza l'importanza dei processi, spesso sottovalutati o comunque trascurati nella prassi didattica della matematica che tende a tenere in considerazione solo i prodotti.

Come osservano Magenes e Maracci (2015), la competenza matematica è definita in termini generali unitari, ossia allo stesso modo per adulti, adolescenti e bambini e, risulta indipendente da specifici ambiti matematici dato che in essa non compaiono riferimenti all'aritmetica, all'algebra, alla geometria, ecc. Inoltre, Maracci e Martignone (2017) notano che in questa definizione mancano aspetti particolarmente importanti in quanto non c'è alcun riferimento agli aspetti motivazionali e affettivi. Infine, si cita la soluzione di problemi di vita quotidiana, ma non quella dei problemi interni alla matematica, aspetto che, invece, ha una notevole importanza nella costruzione della competenza matematica.

In Italia, la normativa che ha recepito le indicazioni della Raccomandazione europea del 2018 ha dettato le fondamenta per la costruzione di percorsi di apprendimento orientati verso l'acquisizione delle otto competenze chiave, ai fini di preparare i giovani alla vita futura e di consolidare e di accrescere saperi e competenze nel processo di apprendimento permanente attraverso i quattro assi culturali.

L'asse matematico, che è quello che ci interessa,

> … ha l'obiettivo di far acquisire allo studente saperi e competenze che lo pongono nelle condizioni di possedere una corretta capacità di giudizio e di sapersi orientare consapevolmente nei diversi contesti del mondo contemporaneo.
> La competenza matematica, che non si esaurisce nel sapere disciplinare e neppure riguarda soltanto gli ambiti operativi di riferimento, consiste nell'abilità di individuare ed applicare le procedure che consentono di esprimere ed affrontare situazioni problematiche attraverso linguaggi formalizzati.
> La competenza matematica comporta la capacità e la disponibilità ad usare modelli matematici di pensiero (dialettico ed algoritmico) e di rappresentazioni grafica e simbolica (formule, modelli, costrutti, grafici, carte), la capacità di comprendere ed esprimere adeguatamente informazioni qualitative e quantitative, di esplorare situazioni problematiche, di porsi e risolvere problemi, di progettare e costruire modelli di situazioni reali. Finalità dell'asse matematico è l'acquisizione al termine dell'obbligo scolastico di istruzione delle abilità necessarie per applicare i principi ed i processi

> matematici di base nel contesto quotidiano della sfera domestica e sul lavoro, nonché per seguire e vagliare la coerenza logica delle argomentazioni proprie e altrui in molteplici contesti di indagine e di decisione.[1]

In questo quadro si è lavorato per sviluppare le nuove linee di indirizzo per l'insegnamento. Il risultato sono stati i seguenti documenti che coprono tutto il percorso scolastico dall'infanzia alla fine della scuola secondaria di secondo grado, e tutti gli indirizzi di scuola:

- Indicazioni per il curricolo per la scuola dell'infanzia e per il primo ciclo dell'istruzione" (2007);
- Indicazioni Nazionali per i percorsi liceali (2010);
- Linee Guida per Istituti Tecnici (2010);
- Linee Guida per gli Istituti Professionali (2010);
- Indicazioni Nazionali per il curricolo per la scuola dell'infanzia e per il primo ciclo di istruzione (2012).

Per quanto riguarda la matematica, tutti questi documenti prendono spunto dai lavori di una Commissione dell'Unione Matematica Italiana, coordinata dal prof. Arzarello e costituita da docenti universitari e della scuola, insediata nel luglio 2000 proprio con il fine di definire un curricolo verticale di matematica, identificando un corpus di conoscenze e abilità fondamentali, necessarie a tutti coloro che entrano nell'attuale società – la cosiddetta "matematica per il cittadino" – da acquisire secondo una scansione organica articolata nei successivi livelli scolastici.

Vengono prodotti tre volumi (Matematica 2001, Matematica 2004, Matematica 2005) il cui punto di partenza, piuttosto esplicito sugli obiettivi che l'educazione matematica nel suo complesso si dovrebbe porre, è il seguente:

> L'educazione matematica deve contribuire, insieme con tutte le altre discipline, alla formazione culturale del cittadino, in modo da consentirgli di partecipare alla vita sociale con consapevolezza e capacità critica. Le competenze del cittadino, al cui raggiungimento concorre l'educazione matematica, sono per esempio: esprimere adeguatamente informazioni, intuire e immaginare, risolvere e porsi problemi, progettare e costruire modelli di situazioni reali, operare scelte in condizioni d'incertezza. La conoscenza dei linguaggi scientifici, e tra essi in primo luogo di quello matematico, si rivela sempre più essenziale per l'acquisizione di una corretta capacità di giudizio. In particolare, l'insegnamento della matematica deve avviare gradualmente, a partire da campi di esperienza ricchi per l'allievo, all'uso del linguaggio e del ragionamento matematico, come strumenti per l'interpretazione del reale e non deve costituire unicamente un bagaglio astratto di nozioni. (Arzarello 2001, p.2)

[1] da Documento Tecnico allegato al DM. 22 agosto 2007 "Regolamento recante norme in materia di adempimento dell'obbligo di istruzione"

I documenti prodotti dalla Commissione descrivono un curricolo di matematica che non si limita solo a considerazioni riguardo ai contenuti essenziali e specifici della matematica, ma fa riferimenti espliciti e descrive indicazioni metodologiche per lo sviluppo di competenze trasversali (quali la capacità di descrivere i processi messi in atto, di argomentare e di affrontare razionalmente situazioni nuove). L'aspetto più marcato è la sottolineatura del passaggio da un approccio fortemente riproduttivo (tipico della tradizionale educazione matematica a livello di scuola di base), caratterizzato dalla richiesta di risolvere enormi quantità di esercizi ripetitivi, ad uno produttivo, caratterizzato dalla richiesta di affrontare problemi nuovi e di assumersi la responsabilità dei propri processi decisionali.

Secondo PISA 2003 la competenza matematica (mathematical literacy) è definita come:

> la capacità di un individuo di identificare e comprendere il ruolo che la matematica gioca nel mondo reale, di operare valutazioni fondate e di utilizzare la matematica e confrontarsi con essa in modi che rispondono alle esigenze della vita di quell'individuo in quanto cittadino che esercita un ruolo costruttivo, impegnato e basato sulla riflessione (OECD, 2003; trad it. 2004, p. 110).

Questa definizione comprende una gamma di competenze piuttosto estesa e, cioè, sia la conoscenza e la comprensione della matematica sia la capacità di applicarla per la soluzione di problemi che emergono dal mondo reale e dalla vita corrente.

Nel 2012 la rivisitazione del quadro di riferimento OCSE determina anche l'aggiornamento della definizione di competenza matematica, ridefinita come segue:

> La capacità di una persona di formulare, utilizzare ed interpretare la matematica in svariati contesti. Tale competenza comprende la capacità di ragionare in modo matematico e di utilizzare concetti, procedure, dati e strumenti di carattere matematico per descrivere, spiegare e prevedere fenomeni. Aiuta gli individui a riconoscere il ruolo che la matematica gioca nel mondo, a operare valutazioni e a prendere decisioni fondate che consentano loro di essere cittadini impegnati, riflessivi e con un ruolo costruttivo (p. 25).

Il linguaggio utilizzato nella definizione è incentrato su un coinvolgimento attivo con la matematica ed è inteso a comprendere la formulazione di un ragionamento matematico e all'utilizzo di concetti, procedimenti, fatti e strumenti matematici per descrivere, spiegare e prevedere determinati fenomeni. Il riferimento a "svariati contesti" non è casuale, ma è alla base dell'idea di competenza e della struttura dei quesiti dell'OCSE-PISA: essere competenti in matematica significa saper

affrontare le sfide in varie situazioni quotidiane Tutte abilità fondamentali per la formazione di cittadini consapevoli e attivi, chiamando in causa la matematica. L'attenzione al contesto reale si riflette anche in riferimento all'utilizzo di strumenti quali righello, calcolatrice, foglio di calcolo.

Nella versione 2012, l'enfasi è sui tre processi: formulare, utilizzare ed interpretare, che si presume gli studenti dovranno attivare per risolvere i quesiti proposti, e che vengono ampiamente descritti all'interno del quadro teorico

La *formulazione* in matematica include il capire quali sono le occasioni in cui applicare ed usare la matematica, ovvero la capacità di rendersi conto del fatto che è possibile applicare la matematica per comprendere o risolvere un particolare problema. Inoltre include la capacità di prendere una situazione come si presenta e trasformarla in una forma gestibile in modo matematico, creando strutture e rappresentazioni matematiche, identificando le variabili e formulando ipotesi semplificative che aiutino a risolvere il problema.

L'*utilizzo* della matematica prevede l'applicazione del ragionamento matematico e l'utilizzo di concetti, procedimenti, fatti e strumenti matematici per arrivare ad una soluzione matematica. Comprende l'esecuzione di calcoli, la manipolazione di espressioni ed equazioni algebriche o di altri modelli matematici, l'analisi delle informazioni in forma matematica a partire da diagrammi e grafici matematici, lo sviluppo di descrizioni e spiegazioni matematiche e l'utilizzo di strumenti matematici per giungere alla soluzione dei problemi.

L'*interpretazione* matematica prevede la riflessione su soluzioni o risultati matematici e la conseguente interpretazione nel contesto del problema. Implica la valutazione di soluzione o ragionamenti matematici in relazione al contesto del problema per comprendere se i risultati siano ragionevoli e sensati nella situazione data.

I tre processi appena esposti sono fondamentali nei soggetti attivi abituati a destreggiarsi in situazioni non familiari e sono alla base del ciclo della matematizzazione: esso consiste in una serie di passaggi che permettono di trasformare il problema situato in un contesto reale in un problema matematico, attraverso l'eliminazione progressiva degli elementi della realtà. Una volta risolto il problema matematico all'interno del contesto matematico, è necessario un ritorno

alla realtà, con la verifica del significato della soluzione e della plausibilità della stessa.

Molto interessante la distinzione proposta da Fandiño Pinilla (2003) tra due accezioni del termine competenza: la competenza in Matematica e la competenza matematica:

- La competenza in Matematica si centra nella disciplina matematica, riconosciuta come scienza costituita, come oggetto proprio, specifico, di conoscenza. L'allievo entra in contatto con saperi specifici, saperi che la società ha inglobato nelle conoscenze riconosciute come base per un dignitoso ingresso nel suo interno; si appropria di una parte di tali saperi, tanto formalmente quanto informalmente. Si riconosce così l'esistenza di un dominio concettuale ed affettivo che media tra l'allievo stesso e la matematica. La competenza è qui vista all'interno dello specifico ambito scolare.
- La competenza matematica si riconosce quando un individuo vede, interpreta e si comporta nel mondo in un senso matematico. L'atteggiamento analitico o sintetico, con il quale alcune persone affrontano situazioni problematiche, è un esempio di questo tipo di competenza. Ci sono buoni risolutori di problemi che possono riconoscere, delimitare e risolvere situazioni problematiche; il che, viceversa, a volte, non è facile da evidenziare in persone che trattano bene, per esempio, algoritmi. Aspetti come il gusto e la valorizzazione della matematica, sono alcuni degli aspetti utili per orientare il raggiungimento della competenza matematica.

Sia nella competenza in Matematica come nella competenza matematica, è evidente la presenza fondamentale di tre aspetti ovvero cognitivo, vale a dire la conoscenza della disciplina; affettivo, ovvero disposizione, volontà, desiderio di rispondere ad una sollecitazione esterna o interna; la tendenza di azione: persistenza, continuità, sollecitudine.

CAPITOLO 2

COMPETENZA MATEMATICA E VALUTAZIONE

2.1 Matematica e realtà

Sulla scorta di quanto già delineato in merito alla letteratura pedagogica, tutte le declinazioni del concetto di *competenza matematica* – seppure con le dovute differenze - insistono sul definire la stessa come una capacità multidimensionale dell'individuo.

Allo stesso modo, la letteratura è concorde nel descrivere la competenza come tale se e solo se – come appunto direbbero i matematici - *calata nella realtà*, in un rapporto di interdipendenza.

Tuttavia, rispetto ad altre aree del sapere, esiste con evidenza una relazione del tutto singolare tra matematica e realtà. Pitagora diceva che "tutto è numero", e lo stesso Galileo ribadiva che "la matematica è il linguaggio con cui è stata scritta la natura", cioè con cui si può leggere la realtà stessa.

Questo tema pare nondimeno contrastare con la percezione che i discenti e – spesso – i docenti hanno rispetto alla materia. In questo senso, è possibile rilevare una discrasia di parte della letteratura educativa.

Il concetto di competenza matematica, infatti, generalizzando, è quasi sempre definito nei termini di "*capacità di usare la matematica […]*" nell'approccio con il mondo. Questa idea appare di per sé attaccabile: se la competenza matematica è "fare matematica" si rischia di cadere in una tautologia o, perlomeno, nella definizione ricorsiva di *matematica per la matematica*.

Ci si riferisce – tra i citati - sia al progetto KOM da parte di Niss e Højgaard del 2003, (seppure con le correzioni significative del 2019) con quel "*do and use mathematics*" che richiama la suddetta dimensione tautologica, così come accade per *"l'abilità di sviluppare e applicare il pensiero matematico*" esplicitata dalla "Raccomandazione del Parlamento Europeo e del Consiglio dell'Unione Europea" del 18 dicembre 2006. Ancora, in questo senso, si parla di "*capacità di una persona di formulare, utilizzare ed interpretare la matematica*" (OCSE, 2012).

L'insidia in cui si incorre è confondere il mezzo con il fine, con il rischio che l'obiettivo non sia più leggere la realtà, bensì matematizzare. Sebbene la relazione con il reale è sempre ribadita in letteratura, la questione è a monte: è come se si dicesse che occorre apprendere l'italiano tramite l'italiano, la filosofia tramite la filosofia, la storia tramite la storia.

Per quanto riguarda la matematica, questa tendenza trova conferma nella pratica didattica quotidiana. La matematica, in aula, spesso decade nell'enigmistica, disancorata al senso del mondo. La *x* di un'equazione rimane tale, perché vista come scollegata a un fenomeno reale. La *x* non è più un simbolo di generalizzazione (cioè una variabile): è essa stessa un ente.

Ne segue che la domanda che viene spesso posta dai discenti, di fronte ad esempio a un teorema o al concetto di numero complesso, è: "*Ma questo a cosa serve?*". In altri termini - ed è questo che dovrebbe essere superato dalla didattica per competenze –, quando si va oltre le quattro operazioni e lo studio dei poligoni, i discenti non vedono le ricadute della matematica nell'esperienza: il che è assurdo, dato che la matematica è, come abbiamo detto, *connaturata* nel mondo che percepiamo attraverso i sensi.

Senz'altro la didattica per competenze contribuisce, con la sua propensione verso un sapere monistico che vada oltre gli steccati compartimentali della conoscenza (Morin, 1999) e l'agganciamento alla realtà, costituisce la strada da percorrere. I problemi che derivano, però, dalle definizioni di competenza matematica citate rimangono e si ripercuotono sul *fare scuola*.

Se è vero, come diceva Gauss, che la matematica è la regina delle scienze, nel trattarla è necessario che sin dal livello d'apprendimento conoscitivo si debba partire da un approccio induttivo, vale a dire dall'esperienza. La matematica è pensiero deduttivo per eccellenza, ma, nello svelarla è il caso di partire dalla fonte dell'esperienza e, lo schema deduttivo seguirà a cascata.

L'approccio induttivo risponde in anticipo alla fatale domanda "*A che serve?*" di cui sopra: è la realtà ad entrare nella matematica, e non il contrario.

D'altra parte non possiamo fare a meno di notare che la stessa concezione di competenza, proprio in virtù di quanto sostenuto finora, risponde a un criterio utilitaristico. Se qualcosa *deve* servire, serve in funzione di un'utilità, il che priva

la matematica di un valore estetico che pure la fonda e la costruisce. La matematica dovrebbe *anche* essere considerata "*Ars gratia artis*", arte per arte, ossia arte solo per l'arte stessa, escludendo ogni fine che non sia la pura e disinteressata bellezza: utilitario, morale, politico, sociale. Uno dei maggiori matematici del Novecento, Godfrey Harold Hardy (1940), sosteneva nella sua formidabile opera "*Apologia di un Matematico*" quanto segue:

> "La massa della verità matematica è ovvia e imponente; le sue applicazioni pratiche, i ponti, le macchine a vapore e le dinamo, si insinuano nell'immaginazione più ottusa. Il pubblico non ha bisogno di essere convinto che c'è qualcosa nella matematica. Tutto questo è a suo modo molto confortante per i matematici, ma è difficile che un vero matematico possa accontentarsene" (p. 55).

e ancora:

> "[...] le materie più "utili" sono abbastanza comunemente solo quelle che è più inutile per la maggior parte di noi imparare. È utile disporre di un'adeguata scorta di fisiologi e ingegneri; ma la fisiologia e l'ingegneria non sono studi utili per gli uomini comuni [...]" (p. 86).

Questa dimensione affettiva è fondamentale per un esercizio della materia altrimenti percepito come arido. La disposizione d'animo del discente è cruciale, pertanto notiamo che la definizione distinta di *Competenza matematica* e C*ompetenza in matematica* già riportata, operata da Fandiño Pinilla, sia la più consona a definire il concetto di competenza matematica nella sua accezione di globalità.

2.2 Quale realtà per l'educazione alla matematica

Una delle pratiche didattiche più significative per l'approccio alla matematica per competenze è la c.d. *Realistic Mathematics Education* (d'ora in poi RME).

In questo approccio all'educazione alla matematica, la connessione della matematica alla realtà è centrale. La realtà non necessita di ancorarsi alla vita vissuta; può anche riferirsi a un mondo delle fiabe purché si adatti al campo esperienziale degli studenti (Van Den Heuvel-Panhuizen, 2005). I problemi di contesto "sono usati sia per costituire che per applicare concetti matematici" (Van Den Heuvel-Panhuizen, 1998). Nel RME, la matematica è vista come *un'attività umana* e viene insegnata in termini di vantaggiosità:

> *Ciò che gli esseri umani devono imparare non è la matematica come sistema chiuso, ma piuttosto come un'attività* (Freudenthal, 1968, p. 3)

Gli studenti vengono considerati parte attiva nel processo di insegnamento-apprendimento (Gravemeijer & Terwel, 2000). Freudenthal (1991) evidenzia un processo di *reinvenzione guidata*, in quanto gli studenti lavorano su problemi di contesto - in termini di realtà ambientale a loro prossima - reinventando la matematica a loro necessaria: ricostruendo dunque il problema secondo i loro schemi logici, sotto una guida adeguata.

De Lange (1996) discute, nondimeno, alcuni problemi relativi all'implementazione di competenze matematiche applicando l'RME. Tali questioni sono denunciate come "perdita" delle abilità di base e routine, "perdita" di visione strutturale, la "perdita" della chiarezza degli obiettivi.

Un altro aspetto critico è legato al *grado di realtà* che gli studenti percepiscono come utile includere nella loro risoluzione dei compiti.

Ernest (2003) discute utilità e rilevanza come due idee distinte. L'utilità è più focalizzata su ciò che può essere valutata in breve tempo come necessario, mentre un oggetto è considerato rilevante quando una persona o un gruppo lo percepisce come tale nel raggiungimento di un obiettivo. Pertanto, se qualcosa come la conoscenza matematica è ritenuta rilevante dagli adulti che guidano il sistema scolastico, non è garantito che sia rilevante anche per gli studenti. Affinché gli studenti possano vedere la rilevanza nelle attività matematiche:

> "[…] è necessaria una pedagogia aperta e sensibile ai loro interessi e desideri espressi. Oltre a ciò, deve anche fare spazio e rispettare le loro voci, atteggiamenti, preoccupazioni e persino dissensi. Un curriculum di matematica veramente rilevante (cioè, visto dagli studenti come rilevante per i propri interessi e obiettivi) richiede la negoziazione per raggiungere un equilibrio tra ciò che noi insegnanti di matematica consideriamo prezioso, ciò che lo stato richiede per la certificazione matematica e, ultimo ma non da ultimo, gli interessi del discente, gli obiettivi e le proprie scelte" (p. 323).

Gli interessi degli studenti sono considerati da Ernest (2003) da tenere in considerazione tanto quanto le opinioni degli esperti, dunque come requisiti matematici di uno stato apprenditivo.

Boaler (1993a; 1993b; 1994) fa riferimento ai presupposti eccessivamente semplificati che costituiscono la base dell'uso di contesti di vita reale, sottolineando al contempo la presa in considerazione dell'esperienza individuale di ogni discente all'interno di un contesto.

Inoltre, il processo di generalizzazione della *matematica di contesto* viene ad essere il risultato delle interpretazioni anche pluriformi generate dal compito, collegate al grado di autonomia dato dagli studenti (Boaler, 1993b). Sempre Boaler (1994), sulla scorta di questa analisi, suggerisce dunque che "i contesti che coinvolgono le variabili del mondo reale introdotte nel compito di realtà dovrebbero essere utilizzati negli esempi solo se i discenti sono in grado di considerare tali contesti e variabili" (p. 563).

Molti altri ricercatori hanno dunque accettato esplicitamente che la disposizione emotiva, anche al di là della *matematica di contesto* è una dimensione importante nella ricerca in didattica della matematica. Dal punto di vista socio-costruttivista, ad esempio, "radicati e delimitati dal contesto specifico e da contesti socio-storici più ampi, i processi affettivi, in stretta interazione con i (meta) processi cognitivi e motivazionali, determinano il comportamento di apprendimento degli studenti" (Op't Eynde et al., 2006). Leder & Forgasz (2006) affermano che i curriculum di matematica sottolineano anche l'importanza della fiducia degli studenti nella matematica e dei loro atteggiamenti positivi nei suoi confronti. La centralità del dominio affettivo nel campo dell'insegnamento della matematica è sottolineata da Goldin (2002) che afferma: "Quando gli studenti fanno matematica, il sistema affettivo non è semplicemente ausiliario alla cognizione, è centrale" (p. 60).

In McLeod e Adams (1989), vengono discusse tre componenti principali relative all'affetto:

- *emozioni*
- *convinzioni*
- *atteggiamenti*

DeBellis e Goldin (2006) utilizzano un modello tetraedrico per definire il dominio affettivo, che è un'estensione dei tre sottodomini offerti da McLeod e dai suoi

collaboratori. Gli autori lo descrivono come costituito da quattro sottodomini della rappresentazione affettiva (l'affetto individuale): emozioni, credenze, atteggiamenti e valori, etica e norme. Questi concetti differiscono l'uno dall'altro per il grado di stabilità, intensità, affetto e cognizione che implicano.

La motivazione è un altro concetto importante nel dominio affettivo che Hannula (2004) definisce come "un potenziale per dirigere il comportamento che è costruito nel sistema che controlla le emozioni. Questo potenziale può manifestarsi nella cognizione, nelle emozioni e/o nel comportamento" (p. 3). Il modo in cui questo potenziale viene realizzato è attraverso i bisogni e gli obiettivi. Hannula (2006) pone i bisogni alla radice della motivazione e li definisce come "istanze specifiche del potenziale generale per dirigere il comportamento" (p. 167), distinguendo tra bisogni e obiettivi in base alla specificità della loro direzione: bisogni verso molti oggetti e obiettivi verso un oggetto specifico.

In rapporto all'RME, la scelta del problema di contesto reale non può dunque prescindere dal dominio affettivo.

Beswick (2011, pp. 369-371), dopo aver esaminato la letteratura pertinente nel campo, compie uno sforzo di sintesi, identificando a proposito cinque scopi per l'inclusione di problemi di contesto nel curriculum di matematica. Due sono collegati all'utilità della matematica e il resto è collegato all'apprendimento della matematica:

- scopi utilitaristici, compreso il soddisfacimento dei bisogni economici della società;
- migliorare la comprensione da parte degli studenti delle questioni importanti;
- migliorare la comprensione da parte degli studenti dei concetti di matematica;
- rafforzare l'apprezzamento da parte degli studenti della natura della matematica;
- migliorare l'affetto degli studenti in relazione alla matematica.

Gli ultimi tre scopi sono stati esaminati da Beswick, il quale ha concluso che il potenziale dei contesti per migliorare la comprensione esiste in una complessa relazione con il modo in cui vengono utilizzati e il contesto "evocato, o destinato ad essere evocato, dal problema" (p. 379).

Un importante studio di Kaiser-Messmer (1993), in Germania, ha indagato sui temi che incontravano le preferenze degli studenti per la matematica di contesto, e ciò ha evidenziato come la differenza di genere sia una componente importante nell'atteggiamento nei confronti della matematica scolastica. Un questionario aperto è stato utilizzato per valutare le differenze attitudinale: agli studenti è stato chiesto quali fossero i loro temi preferiti del mondo reale da utilizzare nelle loro attività matematiche.

Le ragazze hanno preferito principalmente biologia/medicina, tecnologia, sport, biologia/medicina ed ecologia, mentre i ragazzi hanno preferito in preminenza tecnologia, fisica e sport. Com'è ovvio, anche studenti provenienti da contesti culturali diversi (come paesi diversi), luoghi scolastici diversi (come una scuola cittadina o di campagna) e di generico backround diverso possono avere interessi diversi.

In un altro studio, Lingefjärd (2006) ha introdotto otto modelli tematici di riferimento tra cui riscaldamento locale, modelli di studio demografico, raccolta dati, modelli medici e modelli geometrici raccolti in un programma di formazione degli insegnanti. Ai fini dell'indagine, a 200 studenti è stato chiesto di classificare questi modelli. La medicina era la loro scelta preferita, percepita come la più "reale", seguita da problemi di riscaldamento-raffreddamento climatico e ambientale, geometria, modelli di crescita delle popolazioni e sport.

2.2.1 L'interesse nella dimensione affettiva

Schiefele (1991) discute l'interesse da parte dei discenti al processo di apprendimento come un concetto a sé stante e non incluso con tutti i suoi aspetti essenziali sotto la nozione di motivazione intrinseca. Uno di questi aspetti è il focus dell'interesse sul contenuto da apprendere.

Dewey (1913) uno dei precursori della moderna ricerca sull'interesse, ha incentrato la sua analisi sulla distinzione tra apprendimento *basato sugli interessi* e

apprendimento basato sullo sforzo: il primo tiene conto degli interessi degli studenti e il secondo viene meno a questo approccio. Secondo Schiefele (1991), "egli [Dewey] ha respinto gli sforzi all'istruzione che hanno luogo senza riguardo al materiale da apprendere" (p. 300).
Per Dewey (1913, pp. 16-17), ci sono tre caratteristiche di interesse:

- *l'interesse è attivo-dinamico*, cioè siamo attivamente interessati all'interesse;
- *l'interesse è oggettivo*, nel senso che è diretto verso un oggetto;
- *l'interesse è personale*, in termini di connessione di una persona con l'oggetto di interesse che porta risultati ritenuti significativi per il soggetto.

Nessuna definizione comune di interesse può essere trovata nelle varie ricerche, ma generalmente esso è inteso come:

- "insieme di variabili motivazionali, specifiche del contenuto, che hanno un'influenza importante sull'apprendimento e sulla direzione dello sviluppo umano";
- "un costrutto multidimensionale, che ha una stretta relazioni con concetti motivazionali orientati al processo come la motivazione intrinseca o l'esperienza di autodeterminazione" (Krapp, 2007, pp. 6-7).

Nel *Person-Object Approach to Interest (POI)* (Krapp, 1993, 1999; 2002b; Prenzel, 1988, 1992), l'interesse è appunto formalizzato e concettualizzato come una relazione persona-oggetto, in quanto l'interesse è sempre diretto verso il suo oggetto ed è il risultato dell'interazione di una persona con il suo ambiente (Krapp, 2002a, 2007). Questa direzionalità è ciò che rende l'interesse diverso da altri concetti motivazionali.
L'oggetto di interesse può quindi assumere una delle tre forme: oggetto reale, attività e tipi di coinvolgimento, o argomenti (Krapp, 2002b, p. 412):

- Gli *oggetti reali* sono gli oggetti concreti verso i quali è diretto l'interesse. Ad esempio, a qualcuno a cui piace la musica potrebbe piacere in particolare

il pianoforte.

- L'oggetto di interesse può anche essere un'*attività* o un impegno in qualcosa correlato all'interesse, ad esempio, suonare il piano.
- L'ultimo tipo di oggetto di interesse può essere un "*argomento* che rappresenta un certo dominio di conoscenza" (Krapp, 2002b, p. 412).

Secondo l'approccio POI, da un lato c'è la conoscenza e la relazione di una persona con l'oggetto e, dall'altro, c'è l'oggetto come distaccato dalle sue percezioni.
Esistono due tipi di interesse secondo Renninger, Ewen e Lasher (2002), o due diversi livelli di analisi degli interessi (Krapp, Hidi & Renninger, 1992):

- interesse situazionale;
- interesse individuale.

L'interesse situazionale è più di tipo di breve durata, a cominciare da un'attrazione; generalmente deriva da fattori esterni specifici della situazione (Krapp et al., 1992), mentre l'interesse individuale è un tipo di interesse a lungo termine e ha due componenti: conoscenza immagazzinata e valore immagazzinato. Ciò che viene discusso qui è l'interesse di una persona verso il contenuto di un argomento e il potenziale di coinvolgimento di nuovo con esso. La conoscenza immagazzinata "si riferisce alla comprensione in via di sviluppo di una persona delle procedure e alla conoscenza (strutturale) del discorso di particolari attività o idee" (Renninger et al., 2002, p. 469), mentre il valore immagazzinato "include anche sentimenti di competenza come sentimenti positivi e negativi che emergono nel processo di comprensione di ciò che si comprende e che deve ancora essere chiarito" (ibid.).
Esistono due diversi sistemi che hanno la responsabilità di indirizzare il proprio sviluppo e mantenimento dell'interesse, chiamati "sistema a doppia regolazione" (Krapp, 2005, p. 381): uno cognitivo connesso a valori e obiettivi; e uno affettivo connesso all'esperienza vissuta durante un'azione di interesse. Una combinazione di questi due livelli, un'esperienza cognitiva vicina ai valori e agli obiettivi personali e un'esperienza affettiva positiva, ha il potenziale per indirizzare una persona a perseguire il coinvolgimento in un'area o un argomento (Krapp, 2005, 2007).

Ancora per Schiefele (1991), l'interesse individuale ha due componenti:

- valenze legate al sentiment;
- valenze legate al valore.

Il primo è legato ai sentimenti che accompagnano il proprio interesse per un argomento o un oggetto, mentre il secondo ha a che fare con il significato personale di un oggetto di interesse.

Krapp (2002b) discute quattro caratteristiche del costrutto di interesse. Il primo sono gli "aspetti cognitivi": da un lato c'è la disponibilità ad espandere le proprie conoscenze e competenze nel campo di interesse, mentre d'altra parte c'è anche la disponibilità ad applicare le conoscenze esistenti sull'interesse in una nuova situazione (Krapp, 2002b, 2007). Poi ci sono le caratteristiche emotive: sentimenti di competenza (quando la percezione della competenza personale della persona è in linea con i requisiti del compito), tensione, autonomia (una persona soddisfa il suo bisogno di autonomia quando sente che la fonte delle sue azioni è in sé stesso, e questo anche quando le azioni sono influenzate da altri interiorizzando i valori altrui) o l'autodeterminazione, e la relazione (il senso di appartenenza a un gruppo, alla comunità, la cura per ed essere curati dagli altri nella comunità in senso psicologico e non materiale). In terzo luogo, le caratteristiche relative al valore sono sentimenti di significato personale, o "auto-intenzionalità", per cui "gli obiettivi e le intenzioni realizzate volontariamente relative all'area dell'oggetto di un interesse sono compatibili con atteggiamenti, aspettative, valori e altri aspetti della persona auto-sistema" (Krapp, 2007, p. 11). Infine, ha discusso della qualità intrinseca: un'attività basata sugli interessi ha la qualità della motivazione intrinseca perché la propria attività per impegnarsi in una situazione è compatibile con ciò che si desidera fare.

I risultati della ricerca sia sull'interesse individuale che sull'interesse situazionale mostrano effetti positivi dell'interesse sui risultati educativi (Krapp, 2002b). Una meta-analisi di Schiefele, Krapp e Winteler (1992), come citato anche in Krapp (2002b), mostra che il 10% della varianza sul rendimento deriva dal livello di interesse, con il genere come una forte variabile implicata nelle differenze. Studi

sull'interesse situazionale mostrano anche che "un'attività di apprendimento innescata dall'interesse porta a risultati di apprendimento migliori" (Krapp, 2002b, p. 420; Krapp, 2002a). Hidi (1990) mostra che: “l'interesse individuale e quello testuale hanno un profondo effetto sul funzionamento cognitivo e sulla facilitazione dell'apprendimento” (p. 565). Effetti positivi di interesse in diverse parti del processo di apprendimento sono presentati, come citato, anche in molti altri studi (Schiefele, 1991; Renninger et al., 2002).

2.3 Discrasie tra pratiche educative e letteratura pedagogica

2.3.1 Il ruolo della valutazione formativa

In base a quanto proposto, sarebbe necessario che le variabili descritte vengano considerate ampiamente nella pianificazione educativa e nel suo svolgersi tramite l’azione didattica.

Affinché ciò avvenga, è necessario che nel nostro sistema scolastico decolli una cultura della *valutazione formativa*, che miri all’analisi costante dei bisogni educativi di ciascun discente lungo tutto l’itinerario di apprendimento.

La valutazione formativa è la modalità di assestamento continuo del piano di azione didattica in base ad ambiente e stili di apprendimento, livello di interazione e risposte dei discenti.

La valutazione tout-court è spesso malamente intesa come espressione finale (al termine di un trimestre, quadrimestre o anno scolastico) di un mero giudizio di valore sul livello di conoscenza raggiunto dall’alunno su una scala decimale: in altre parole, un atto finale, accertativo, che si limita a registrare l’adattamento o meno dei discenti alla proposta formativa. La valutazione deve essere invece ininterrotta e parte integrante del processo di insegnamento/apprendimento. All’inizio, durante ed al termine dell’itinerario formativo, occorre collocare momenti di valutazione/monitoraggio miranti a fornire flussi informativi concernenti il procedere dell’apprendimento. Lo scopo di ciò è duplice: conoscere i livelli dei singoli e correggere, se necessario, le tappe e le modalità di percorso dell’itinerario proposto.

La valutazione “finale” è in realtà solo una delle fasi della valutazione, quella *sommativa,* nella quale si verifica il livello di competenza per ciò che riguarda uno

specifico segmento d'apprendimento (ad esempio, con una prova al termine di una Unità di Apprendimento).

La valutazione intesa come formativa deve invece coinvolgere il processo didattico in tutti i suoi aspetti dalla sua ideazione, alla sua esecuzione, alla sua retro analisi, in senso metariflessivo da parte del docente. Valutare significa, in questo senso, decidere in base alle continue sollecitazioni.

Abbiamo visto come nella matematica di contesto, sia per ciò che riguarda l'RMA che per quanto riguarda il POI, quanto sia fondamentale, da parte del docente, l'individuazione di una convergenza tra i contenuti della disciplina e l'esperienza prossimale da parte dei discenti.

Nel contesto odierno che volge ai Piani Formativi Individuali, è necessario dunque valutare le condizioni di partenza che ciascun discente presenta al principio dell'itinerario apprenditivo.

In questo senso, fa parte della valutazione formativa e ne costituisce il fondamento la *valutazione diagnostico-iniziale*. La valutazione diagnostico-iniziale permette di rilevare quelle competenze ritenute basilari – in maniera descrittiva e non classificatoria - rispetto al contenuto da veicolare e, laddove se ne avverta la necessità, proporre specifiche attività di recupero o di consolidamento per compensare eventuali disparità presenti nel background d'ingresso dei singoli. Per competenze ritenute basilari si intendono i *prerequisiti*, ossia quelle conoscenze e/o abilità propedeutiche agli obiettivi cognitivi specifici previsti. In altre parole il prerequisito permette all'allievo di acquisire senza difficoltà il segmento di apprendimento richiesto.

I prerequisiti dovranno essere suddivisi in essenziali e di supporto. I primi sono necessari per il conseguimento effettivo dell'obiettivo prestabilito, i secondi, invece, possono essere di "aiuto" al conseguimento dello stesso.

La determinazione dei prerequisiti essenziali dal punto di visto può avvenire mediante una procedura che è stata definita *analisi del compito*. L'analisi del compito consiste in una scomposizione delle competenze a ritroso, dell'obiettivo in capacità ed elementi sempre più semplici; si tratta, quindi, di individuare i segmenti apprenditivi ad esso sottesi (Lastrucci, 2004). In questo modo si otterrà una sorta di

mappa di ciò che deve essere conosciuto al fine di potersi avviare alla comprensione di un preciso obiettivo.

Riportiamo un esempio in campo matematico:

> "Se l'insegnante ha stabilito che obiettivo del suo programma dovrà essere quello di risolvere problemi geometrici mediante l'applicazione del teorema di Pitagora, ossia che i suoi alunni dovranno conoscere questo teorema e saperlo applicare, egli dovrà analizzare tale compito particolare e stabilire quali abilità di grado inferiore esso presuppone. Le abilità fondamentali che rendono possibile la comprensione e l'applicazione di questo teorema sono le seguenti:
>
> - conoscere le proprietà essenziali dei triangoli e quindi saper riconoscere un triangolo rettangolo;
> - saper scomporre una figura geometrica complessa in figure geometriche più elementari;
> - saper calcolare l'area di un quadrato;
> - risolvere una radice quadrata.
>
> Affinché un alunno possa apprendere il teorema di Pitagora è quindi necessario che egli abbia già conseguito questi apprendimenti preliminari, che costituiscono i pre-requisiti per la sua comprensione. L' insegnante, prima di procedere alla spiegazione del teorema in questione, dovrà quindi verificare che tutti gli alunni possiedano tali pre-requisiti" (Lastrucci, 2006, p. 95-96).

Occorre precisare che la valutazione diagnostico-iniziale non si esaurisce nella rilevazione dei prerequisiti, pur essendo essa di fondamentale importanza. Si dovrebbe tendere, per quanto ciò sia difficile, a elaborare profili d'ingresso molto più complessi - ci riferiamo agli aspetti psico-fisici, motivazionali, relazionali, sociologici - che, certamente, potranno contribuire alla definizione di un quadro iniziale più esaustivo delle caratteristiche peculiari di ciascun discente.

A proposito di ciò, è importante sottolineare quanto riportato in letteratura a proposito del concetto di *habitus* presente in ogni discente e di come esso debba essere indagato dal docente in sede diagnostico-iniziale.

Bourdieu (1977) definisce l'habitus un insieme di disposizioni, presente in tutti, che guida la reazione e il comportamento delle persone nei confronti degli eventi della vita quotidiana e consente loro di percepire le possibilità e le opportunità in quanto tali. In questo modo l'habitus adempie al suo ruolo di *strutture evolutive* che generano pratiche. Il modo in cui si costituisce l'habitus è attraverso le esperienze passate di partecipazione alle pratiche della vita. Queste esperienze modellano le opinioni, i pensieri e le percezioni delle persone su pratiche specifiche e sulla vita in generale, creando disposizioni che costituiscono l'habitus di ciascuno, cioè la

struttura che relaziona la realtà e l'individuo e il suo – come lo definiscono Bourdieu e Wacquant (2002) – *capitale* familare, sociale, culturale, simbolico.

2.4 L'intercettazione di contesti di realtà significativi

L'indagine su habitus, interesse e capitale umano nei discenti, perlomeno in fase diagnostico-inziale, dovrebbe essere imprescindibile – ma nel fare scuola tradizionale non è così. Questa operazione, nel campo del perseguimento della competenza matematica, è infatti necessaria per individuare i contesti significativi di cui sopra, ai quali ancorare la materia in rapporto agli approcci RME e POI.
A tal proposito, potrebbe essere sufficiente riadattare (per esempio: indicando delle sottoaree rispetto ai vari contesti d'indagine mostrati o aggiornando i temi) il questionario di esplorazione d'interesse elaborato da Julie e Mbewka (2005) e ridelineato da Julie e Holtman (2008) - tradotto in lingua di seguito – e sottoporlo ai discenti (Figura 2.1).
Ciascun discente è chiamato ad esprimere il suo livello di interesse per ogni contesto da trattare matematicamente secondo gli indicatori "Alto" – "Medio" – "Basso" – "Nullo".
La varietà pressoché infinita dei contesti esprimibili che possono essere mostrati ai discenti rivela immediatamente agli alunni la natura intrinsecamente matematica dei fenomeni più diversi, e, allo stesso tempo ciò è fondamentale per orientare l'azione del docente.

QUESTIONARIO: INTERESSI MATEMATICI
- Cose che mi interessa imparare in matematica -

COGNOME E NOME: _____
CLASSE: _____ SEZIONE: _____
DATA: _____

Cosa vorresti imparare in matematica? Alcuni argomenti sono nell'elenco seguente. Accanto a ogni elemento dell'elenco, indica quanto sei interessato all'argomento mettendo una croce accanto a:

□ Alto | □ Medio | □ Basso | □ Nullo

in base al tuo livello di interesse.

Rispondi per tutti gli argomenti indicando un solo livello di interesse per ciascuno di essi.
Non ci sono risposte corrette: vogliamo che tu ci dica cosa ti piace.

IL MIO LIVELLO DI INTERESSE PER LA MATEMATICA COINVOLTA NEI SEGUENTI ARGOMENTI È:

1	**Matematica usata per creare videogiochi e per salvare file digitali (video, documenti, musica, …) su supporti di memoria.**	□ Alto	□ Medio	□ Basso	□ Nullo
2	**Matematica usata nelle costruzioni e in ingegneria**	□ Alto	□ Medio	□ Basso	□ Nullo
3	**Matematica usata in agricoltura**	□ Alto	□ Medio	□ Basso	□ Nullo
4	**Matematica usata in problemi economici e di gestione del denaro**	□ Alto	□ Medio	□ Basso	□ Nullo
5	**Matematica usata in politica nazionale e internazionale**	□ Alto	□ Medio	□ Basso	□ Nullo
6	**Matematica usata nella musica**	□ Alto	□ Medio	□ Basso	□ Nullo
7	**Matematica usata nel settore medico e sanitario**	□ Alto	□ Medio	□ Basso	□ Nullo
8	**Matematica usata nel settore di gestione aziendale**	□ Alto	□ Medio	□ Basso	□ Nullo
9	**Matematica usata nel campo dell'esercizio fisico e dello sport**	□ Alto	□ Medio	□ Basso	□ Nullo
10	**Matematica usata nello studio delle risposte a disastri naturali e questioni climatiche**	□ Alto	□ Medio	□ Basso	□ Nullo

Figura 2.1: questionario di esplorazione d'interesse - Elaborato da Julie e Mbewka (2005) e ridelineato da Julie e Holtman (2008)

2.5 La misurazione valutativa

Dunque gli scopi di indagine sulle dimensioni di competenza e sulle dimensioni affettive e dispositive attinenti alla valutazione formativa (che, come detto, non si ferma né nel momento diagnostico-iniziale e tantomeno è riferibile alla sola valutazione sommativa finale) hanno carattere duplice:

- localizzare con precisione le difficoltà apprenditive dei singoli al fine di mettere in atto i necessari interventi compensativi o rafforzare l'apprendimento nel caso in cui i risultati siano soddisfacenti;
- offrire informazioni utili al docente per decidere se e come aggiustare/correggere la proposta didattica.

Affinché questi obiettivi siano raggiunti la fase di raccolta delle informazioni da parte del docente è decisiva. Tale fase viene definita *misurazione.*
È evidente che maggiori sono le informazioni reperite in prima istanza dalla misurazione, più efficace sarà la valutazione che ne scaturisce.
La misurazione deve avvenire nel rispetto di tre passaggi sostanziali:

- *stimolazione:* questa è una fase necessaria dal momento che le performance da sottoporre a controllo nella scuola, riguardando prevalentemente abilità di tipo intellettuale, necessitano, per essere espresse, di stimoli ben precisi. Ne consegue, che la stimolazione si utilizzi per incitare i discenti a manifestare le abilità culturali acquisite. Lo stimolo varia a seconda del tipo di prove adottato; gli item nelle prove oggettive di profitto, le domande nelle prove orali, le tracce in quelle scritte. Nel caso delle prove oggettive di profitto (test a stimolo chiuso a risposta chiusa, ad esempio), lo stimolo, in genere, viene colto dal discente indipendentemente dall'insegnante; nelle interrogazioni, invece, l'interazione con l'insegnante è necessaria;
- *registrazione:* questa fase successiva consiste nell' acquisizione delle abilità culturali manifestate dai discenti in risposta agli stimoli precedentemente veicolati. La registrazione deve essere una copia *fedele* di ciò che il discente ha prodotto. Senza di essa, le variegate performance dei discenti non potrebbero essere rammentate in sede decisionale. Nelle interrogazioni questo momento avviene nella memoria dell'insegnante, mentre nelle prove scritte rimane evidente sul foglio (digitale o cartaceo che sia);
- *lettura:* fase conclusiva della misurazione. Grazie ad essa i dati vengono raccolti e ordinati. L'insegnante *corregge*, come si dice, seguendo criteri prestabiliti, ciò che gli allievi hanno prodotto. In genere la lettura deve essere suddivisa in due parti: una di tipo *analitico*, nel momento in cui ci si sofferma sulle singole risposte dei discenti o comunque sulle diverse parti della performance, e un'altra di tipo *sintetico*, utile per comporre le varie parti procedendo, quindi, verso uno sguardo d'insieme della prestazione.

2.5.1 Distorsioni nella misurazione

Le prove tradizionalmente utilizzate a scuola per misurare e valutare i repertori culturali dei discenti risultano spesso poco affidabili. Esse non permettono una misurazione attendibile e valida delle molteplici abilità culturali in possesso degli allievi. Ciò non vuol dire che la loro funzione, all'interno del processo di insegnamento/apprendimento, sia esaurita. È invece necessario conoscerne le peculiarità, restringere il loro campo d'azione e utilizzarle, di conseguenza, nei modi più produttivi dal punto di vista didattico.

Prendiamo in analisi una tra le prove orali più diffuse, l'interrogazione, mettendone in rilievo i limiti rispetto ai vari aspetti dal punto di vista metrologico (Vertecchi, 1993):

- *La stimolazione*. Gli stimoli non sono uguali per tutti i soggetti, se non nel caso in cui a ciascun discente vengano poste esattamente le stesse domande; in questa situazione, però, coloro che verranno interrogati in seguito risulteranno per ciò stesso avvantaggiati. Va precisato che gli stimoli, soprattutto per ragioni di tempo, non sono rappresentativi dei contenuti dell'apprendimento e delle sue dimensioni formali (co-noscenza, comprensione, sintesi ecc.).
- *Il linguaggio utilizzato dal docente*. Non può essere uguale per tutti i discenti soprattutto perché, in genere, gli stimoli sono inventati nel momento stesso della loro somministrazione. Pertanto è opportuno chiedersi: con una stimolazione così diversificata senza preordine, è possibile confrontare le diverse prestazioni degli allievi? E ancora: è possibile accertare se tutti gli allievi abbiano conseguito le stesse abilità culturali? Non essendo possibile rispondere affermativamente a questa risposta, diciamo che l'interrogazione, data la sua stessa struttura, non è adatta ad assolvere le esigenze di omogeneità delle opportunità e di rappresentatività, così importanti per dar vita ad una corretta misurazione;
- *Modalità differenti di stimolare gli allievi*. Esse, contribuiscono a rendere questa prova spesso inattendibile. Il docente che durante l'interrogazione ostenti un linguaggio nervoso, impaziente, inquisitorio o ironico, finisce

sicuramente per danneggiare la performance dell'allievo, al contrario dell'insegnante che si dimostra paziente, disponibile all'ascolto. In questo secondo caso si creerà un "clima psicologico" favorevole a chi deve sostenere la prova, mentre nel primo avverrà il contrario. È evidente, che gli atteggiamenti relazionali del docente incidono significativamente sul risultato della prova;

- *La registrazione*. Quest'ultima, conferma l'inattendibilità di questa prova. Accade sovente che durante l'interrogazione si registrino comportamenti cognitivi inutili o quantomeno non necessari per quella particolare misurazione. La registrazione, infatti, avviene nella memoria dell'insegnante senza criteri fissati a priori (e tecniche precise), ogni volta, quindi, diversi. Anche in ragione di ciò sarà quasi impossibile discernere con chiarezza ciò che è importante, ai fini della misurazione richiesta, rispetto a ciò che non lo è;
- *La lettura*. È molto difficile distinguere la lettura dalla registrazione: raramente può avvenire nel momento in cui l'insegnante ascolta (cioè registra), e nello stesso tempo cerca di mettere ordine (quindi legge) in ciò che proviene dal discente. Anche la lettura, quindi, esprime fortemente la soggettività dell'insegnante. In questo caso non esistono criteri in base ai quali ordinare e classificare i dati raccolti (il grado di accettabilità, ad esempio dei comportamenti cognitivi); essi variano di volta in volta. Quest'ultimo momento, pertanto, risulta impreciso sia a causa delle decisioni arbitrarie del docente, sia perché costituisce la conseguenza delle fasi condotte precedentemente in modo inattendibile. Non si dimentichi, inoltre, che sulla lettura possono avere influenza alcuni altri effetti di distorsione di seguito esposti:
- *effetto di stereotipia*: l'insegnante si lascia influenzare dal tipo di valutazione che inizialmente ha attribuito all'allievo. Le prestazioni successive alla prima, cioè, verranno valutate non in base alle presunte conoscenze reali che l'alunno possiede bensì all'opinione (potremmo dire anche immagine) che, spesso non consapevolmente, l'insegnante si è creato di quell'alunno attraverso le prime prove. In altre parole, se ad un alunno

sarà assegnato un voto buono inizialmente, ciò tenderà a verificarsi anche in seguito con piccole variazioni e viceversa;

- *effetto alone*: talvolta il giudizio viene alterato da elementi affettivi; si finisce così per trascurare le abilità cognitive che avrebbero dovuto essere l'oggetto della misurazione. L'insegnante, ad esempio, ad un alunno cortese e capace di dialogare correttamente, tenderà ad attribuire un punteggio superiore; ciò si riscontra anche per coloro che posseggono una grafia facilmente leggibile e sono molto ordinati, nel caso di una valutazione scritta;
- *effetti di ordine di correzione, di successione, di ancoraggio*: durante una prova orale, come l'interrogazione, l'alunno chiamato in seguito a chi ha ottenuto un punteggio basso, per contrasto, anche se non in possesso di molte abilità aggiuntive rispetto al precedente, risulterà pur tuttavia agli occhi dell'insegnante molto più preparato; ovviamente sarà vero anche il contrario.

A tal proposito citiamo un esperimento condotto da Bonniol (1972), come riportato da Giovannini:

> "Chiunque abbia avuto esperienze di esami sa quanto possa essere svantaggioso essere interrogato dopo un candidato molto brillante; così pure avrà avuto modo di riscontrare come un risultato negativo del candidato precedente possa creare una situazione di vantaggio. Il fenomeno della posizione di una prova (scritta od orale) nel momento dell'attribuzione del voto è stato oggetto di numerosi esperimenti, che ne hanno messo in evidenza gli effetti sulle valutazioni espresse. Il più semplice consiste nel fare correggere uno stesso pacchetto di compiti, in un certo ordine a un gruppo di correttori e nell'ordine inverso a un altro gruppo. Con tale metodo, Bonniol ha confrontato i voti attribuiti a 26 prove, a seconda che esse fossero state presentate ai correttori nell' ordine da l a 26 (gruppo I, composto da 9 insegnanti) o da 26 a l (gruppo II, pure composto da 9 insegnanti). I risultati sono stati rilevati non soltanto in base alla posizione dei compiti nei due pacchetti, ma anche in base alla posizione del compito nell'ambito dello stesso gruppo di compiti. È stato inoltre possibile rilevare che, anche dividendo il pacchetto in sottopacchetti, per esempio a metà o in tre parti, la valutazione non è mai la stessa. Gli effetti di successione che intervengono nella valutazione sono fondamentalmente degli effetti di sovra o di sottoestimazione per contrasto. I correttori, cioè, tendono a sovrastimare i compiti corretti per primi rispetto agli ultimi, ad eccezione del primo che viene sottostimato. Bonniol, per verificare sperimentalmente l'effetto di contrasto, ha introdotto uno o più compiti ottimi o molto scadenti in una serie di compiti di livello medio. In tal caso gli effetti d'ordine possono essere considerati come effetti di ancoraggio. L'ancoraggio, infatti, è uno «stimolo» che viene preso come riferimento, non solo perché presente più degli altri, ma anche perché segnalato, in un modo o in altro, all' attenzione di un individuo, o perché collocato in una situazione particolare. In tal modo lo stesso compito può essere sovra o sottovalutato a seconda che sia corretto rispettivamente dopo uno molto scarso o uno molto buono." (Giovannini, 1988).

2.6 La competenza matematica nelle prove INVALSI

L'INVALSI, ancora oggi oggetto di argomentazioni molto dibattute, viene istituito nel 1999 attraverso il D.P.R. 258/99 quale ente pubblico di ricerca vigilato dal MIUR.; raccoglie l'eredità del CEDE (Centro Europeo dell'Educazione), e il suo obiettivo fondamentale consiste nel valutare il livello di apprendimento degli allievi, operando su tutto il sistema scolastico nazionale.
Con il D. Lgs 286/04 nasce il Servizio Nazionale di Valutazione: nel decreto si attribuisce all'INVALSI il compito di preparare, somministrare e analizzare prove di apprendimento.
Con la Legge 10 del 26/02/2011 si definiscono i compiti dell'INVALSI:

- Creare e rendere disponibili i test standardizzati;
- Fornire alle scuole le metodologie per valutare i risultati delle prove stesse;
- Avere dei propri rilevatori professionisti che agiscono su campioni significativi;
- Partecipare alle rilevazioni internazionali;
- Contribuire a coordinare la progettazione complessiva del sistema;
- Contribuire a realizzare un rapporto sulla qualità della scuola.

In rapporto al primo punto, spetta dunque all'INVALSI la preparazione, la somministrazione e l'analisi delle prove di apprendimento. Le prove hanno carattere standardizzato e nell'ambito della Scuola Secondaria di II Grado sono somministrate alle classi seconde e quinte del ciclo attraverso test CBT (Computer-Based Testing).

Per ciò che riguarda la matematica, le idee chiave su cui si fondano i quesiti rispecchiano l'idea di competenza così come esplicitata dall'OCSE/PISA: l'apprendimento secondo competenza si basa sullo studio combinato dei concetti relativi a quattro macroaree del sapere matematico:

- *Numeri*
- *Spazio e forma*
- *Relazioni e funzioni*
- *Dati e previsioni*

Le prove standardizzate prendono forma da un preciso Quadro teorico Di Riferimento, detto QdR. Il QdR esplicita i principali punti di riferimento concettuali, i collegamenti con le indicazioni di legge, le idee chiave che guidano la progettazione delle prove e alcune informazioni sull'evoluzione degli strumenti messi in campo negli anni per migliorare il sistema delle Rilevazioni Nazionali.
In quanto alla costruzione dei quesiti, il QdR prende in considerazione come riferimento l'aspetto duplice della disciplina a cui si è fatto cenno nell'introduzione a questo capitolo: la matematica come strumento di interpretazione della realtà e la matematica in sé. Più precisamente, la sezione del portale del CINECA (il Consorzio Intrauniversitario Italiano che fornisce le piattaforme software per diverse attività del MIUR) che chiarifica i caratteri delle prove INVALSI somministrate per la matematica indica i seguenti aspetti[2]:

- uno rivolto alla modellizzazione e alle applicazioni per leggere, interpretare la realtà e risolvere problemi della vita di tutti i giorni;
- l'altro rivolto allo sviluppo interno, alla riflessione e alle speculazioni sugli stessi prodotti culturali dell'attività matematica.

Questa comunanza di scopi è in effetti rivolta, nelle finalità, a rispettare innanzitutto la materia trattata, che può essere insieme mezzo e fine di studio. Si considera la matematica sia come strumento utile nella vita concreta sia come un prodotto culturale che riguarda le speculazioni più libere dello spirito umano.

Le prove di matematica sono costituite da quesiti di diverse categorie:

[2] https://invalsi-areaprove.cineca.it/docs/file/QdR_MATEMATICA.pdf

- *Quesiti a risposta chiusa*: quesiti a scelta multipla che presentano quattro opzioni di risposta, una sola delle quali è corretta e quesiti a scelta multipla complessa che richiedono la determinazione del valore di verità di alcune proposizioni.
- *Quesiti a risposta aperta univoca*: sono domande che richiedono, per esempio, il risultato di un calcolo algebrico o numerico.
- *Quesiti a risposta aperta articolata*: possono richiedere semplici argomentazioni, giustificazioni, sequenze di calcoli. Per questi quesiti viene fornita una griglia di correzione articolata, costruita in base alle risposte ottenute nel pretest. La griglia di correzione prevede anche la categoria delle risposte accettabili: risposte che non sono propriamente corrette ma dalle quali si evince che lo studente ha risposto adeguatamente, considerando lo specifico scopo della domanda. Queste domande, nelle prove cartacee attinenti ad altri cicli, vengono corrette dai singoli insegnanti; invece per quanto riguarda le prove CBT, la correzione è effettuata centralmente dall'INVALSI.
- *Quesiti "cloze"*: i quesiti in questo caso richiedono il completamento di frasi, calcoli o espressioni mediante l'utilizzo di elementi forniti nel testo.
- *Quesiti di tipo "associazione"*: si richiede di individuare la corrispondenza corretta fra elementi di due insiemi dati.

La divisione dei contenuti matematici in ambiti è ormai condivisa a livello internazionale: ogni domanda è classificata in un determinato ambito, che è sempre da considerarsi solo come l'ambito *prevalente* (e non esclusivo) di riferimento.
Nel complesso il percorso di produzione di una prova dura dai due ai tre anni e inizia con la produzione delle domande da parte degli autori, che sono tutti insegnanti o dirigenti del sistema nazionale di istruzione. La formulazione delle domande avviene individualmente e in gruppo. Nel processo di formulazione gli autori sono affiancati da esperti e per gli autori vengono organizzati periodicamente seminari di formazione.

Con le domande prodotte sono preparate le prove per i pretest. Le prove sono assemblate da gruppi di lavoro, uno per ogni grado, composti da insegnanti,

dirigenti, ricercatori, esperti INVALSI. I gruppi di lavoro procedono anche alla revisione linguistica e alla sistemazione grafica. Un gruppo di coordinamento, costituito anch'esso da insegnanti, dirigenti, ricercatori, esperti INVALSI, sovrintende alla coerenza complessiva del sistema delle prove, curando i necessari collegamenti concettuali. Le domande sono costruite con l'obiettivo di essere chiaramente comprese nel loro scopo. Per questo è posta un'attenzione particolare ai diversi aspetti della loro formulazione linguistica: in questo modo si cerca di evitare che una non necessaria difficoltà di tipo linguistico.

2.7 Come si valuta la competenza matematica nelle Prove INVALSI

La standardizzazione delle prove INVALSI è elemento di discussione accesa nell'ambito della letteratura pedagogica.

La concezione di prove uguali per tutti i discenti stride, in effetti, con l'idea di personalizzazione della proposta formativa (intesa come strategia didattica finalizzata a garantire ad ogni discente una propria forma di eccellenza cognitiva, attraverso possibilità elettive di coltivare le proprie potenzialità intellettive) che sta avanzando faticosamente nel fare scuola.

Se la necessità di costruire una base dati per rilevare l'andamento, complessivo e particolare, del sistema scolastico dal punto di vista dei livelli di competenza raggiunti dagli alunni è indiscutibile, è altresì evidente che la modalità della prova non può intercettare, per sua stessa natura, una dimensione multiforme e non lineare come quella della competenza individuale.

La matematica di contesto è giocoforza esclusa: ogni scenario formativo è, per ambiente, attitudini e contingenze, in un certo modo unico e, sebbene parte dei quesiti si ricolleghi a *situazioni realistiche*, tali situazioni prescindono da un'indagine preliminare su *interessi e disposizioni* dei discenti che deve svolgersi, come abbiamo sostenuto in precedenza, in un ambito micro locale non standardizzabile (classe per classe, se vogliamo).

Lo strumento della prova standardizzato, che risulta particolarmente utile a dare informazioni su alcune criticità del sistema nel suo complesso, è poco adatto a misurare il conseguimento di alcuni dei traguardi di competenza. Per esempio,

mentre le prove standardizzate sono un mezzo utile per valutare i traguardi "*Descrive, denomina e classifica figure in base a caratteristiche geometriche, ne determina misure*" e "*Riconosce e quantifica, in casi semplici, situazioni di incertezza*", possono essere meno adeguate a valutare pienamente un traguardo come "*Costruisce ragionamenti formulando ipotesi, sostenendo le proprie idee e confrontandosi con il punto di vista di altri*" e sono sicuramente non adeguate a valutare il traguardo "*Sviluppa un atteggiamento positivo rispetto alla matematica*".

In questo senso le prove standardizzate non devono né possono sostituirsi all'azione del docente per la valutazione degli studenti della propria classe: i risultati delle prove possono essere utilizzati come una fra le molte informazioni di cui l'insegnante deve entrare in possesso per valutare dinamicamente le prestazioni dei propri studenti, ma non possono costituire l'unica sorgente di informazioni né quella più importante per la valutazione del singolo alunno, essenzialmente per tre motivi:

- le prove standardizzate, come già detto, non possono misurare né tantomeno valutare il conseguimento di traguardi caratterizzati da aspetti metacognitivi o non cognitivi; analogamente, almeno come sono attualmente strutturate, le prove standardizzate non consentono di valutare la competenza raggiunta dagli studenti nell'uso di tecnologie per costruire significati degli oggetti di studio;
- le prove standardizzate sono poco adatte a valutare pienamente il conseguimento di competenze nel: produrre congetture; sostenere argomentazioni e dimostrazioni complesse; porsi e risolvere problemi di una certa difficoltà e complessità, che richiedono diversi passi per essere affrontati e risolti; costruire e utilizzare modelli per situazioni complesse;
- le prove standardizzate tendono a porre domande per le quali la correzione delle risposte è indipendente da chi la effettua; in altri termini tendono, per quanto possibile, a eliminare ogni elemento di soggettività. Invece la valutazione che l'insegnante fa delle competenze conseguite da uno studente non può non essere soggettiva, dipendente anche da fattori sociali

e affettivi, e tesa anche a promuovere l'acquisizione stessa delle competenze: tanto più è soggettiva, tanto più diventa adatta allo studente che viene valutato e quindi ricca e significativa per quello studente.

Questa tematica è d'importanza riconosciuta, tanto che lo stesso QdR specifica che, per la Scuola Superiore di II Grado, le prove INVALSI certificano i traguardi di abilità e conoscenze la cui padronanza è essenziale per l'esercizio della competenza matematica: dunque il livello dei prerequisiti per la stessa.
D'altra parte la possibilità di avere informazioni su diversi aspetti dell'apprendimento, confrontabili con le informazioni sugli stessi aspetti relative a gruppi di studenti simili fra loro come background socio-economico-culturale o contesto geografico, è uno strumento in mano a ogni insegnante per valutare (nel senso più ampio della parola) in modo più completo i propri allievi e migliorare continuamente la propria azione didattica.
Le prove INVALSI possono quindi fornire importantissime informazioni di sistema con cui l'insegnante si può confrontare e di cui si può avvalere per la valutazione individuale.
Per maggiore chiarezza, si riportano gli indicatori (traguardi T) comportamentali del discente codificati dall'INVALSI per la valutazione del livello di apprendimento della matematica, ciascuno derivante da una delle macroaree citate in precedenza:

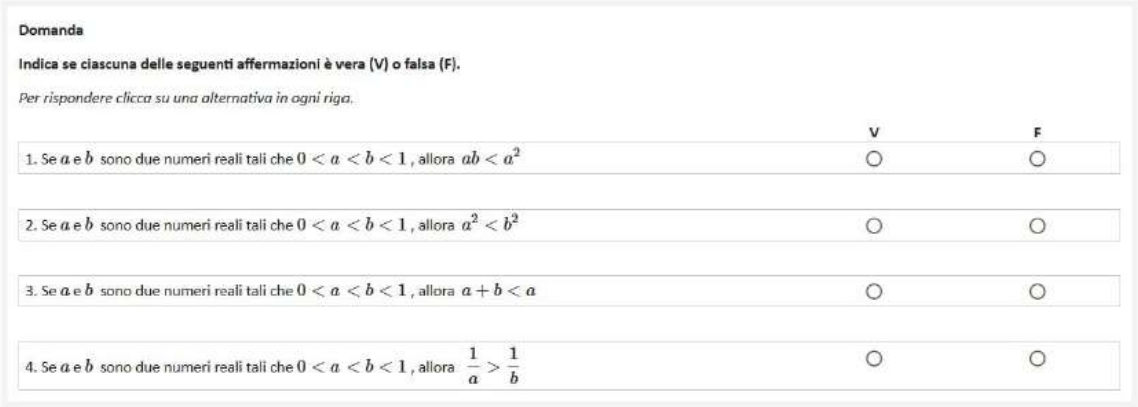
- T1: Si muove con sicurezza nel calcolo numerico e simbolico; applica correttamente le proprietà delle operazioni con i numeri reali; realizza ordinamenti, calcola ordini di grandezza ed effettua stime numeriche e approssimazioni. Risolve equazioni e disequazioni
- T2: Riconosce e denomina le forme del piano e dello spazio, le loro rappresentazioni e ne coglie le relazioni tra gli elementi. Utilizza proprietà delle figure geometriche e teoremi per il calcolo di lunghezze, aree e volumi.
- T3: Rappresenta, elabora, analizza e interpreta dati, anche calcolando indici, per descrivere situazioni e individuare caratteristiche di un fenomeno o di una situazione, eventualmente anche allo scopo di produrre ipotesi e

prendere decisioni.

- T4: Riconosce e risolve problemi in contesti diversi valutando le informazioni possedute, le loro relazioni con ciò che si vuole determinare e la coerenza e plausibilità del procedimento risolutivo e dei risultati trovati.
- T5: Spiega il procedimento seguito, anche in forma scritta, confronta procedimenti diversi e produce formalizzazioni che gli consentono di passare da un problema specifico a una classe di problemi.
- T6: Riconosce, fra diverse argomentazioni, quelle che sono adeguate a sostenere una determinata tesi; produce esempi e controesempi utili a confermare o a confutare una determinata affermazione.
- T7: Produce argomentazioni esplicitando la tesi, utilizzando conoscenze e forme argomentative pertinenti alla tesi oggetto di argomentazione.
- T8: Comprende e utilizza diverse forme di rappresentazione, passando dall'una all'altra a seconda delle esigenze (grafica, numerica, simbolica, nella lingua naturale).
- T9: Riconosce, tra diversi modelli matematici proposti, quelli più adeguati a descrivere determinate situazioni oggetto di interesse.
- T10: Utilizza semplici modelli matematici dati per descrivere situazioni e fenomeni reali.
- T11: Dati una situazione o un fenomeno reali individua le variabili significative e costruisce un modello matematico adeguato a rappresentarli.
- T12: Esprime valutazioni e stime di probabilità in situazioni caratterizzate da incertezza. Esprime stime di probabilità di eventi composti a partire dalla conoscenza delle probabilità di eventi elementari.

Dalla lettura degli esempi di interesse che seguono, tratti da un test INVALSI del 2018 per le classi seconde della Scuola Superiore di Secondo Grado, si riportano sinteticamente alcune delle modalità e delle dimensioni di traguardo dei quesiti:

Esempio n. 1:



Domanda

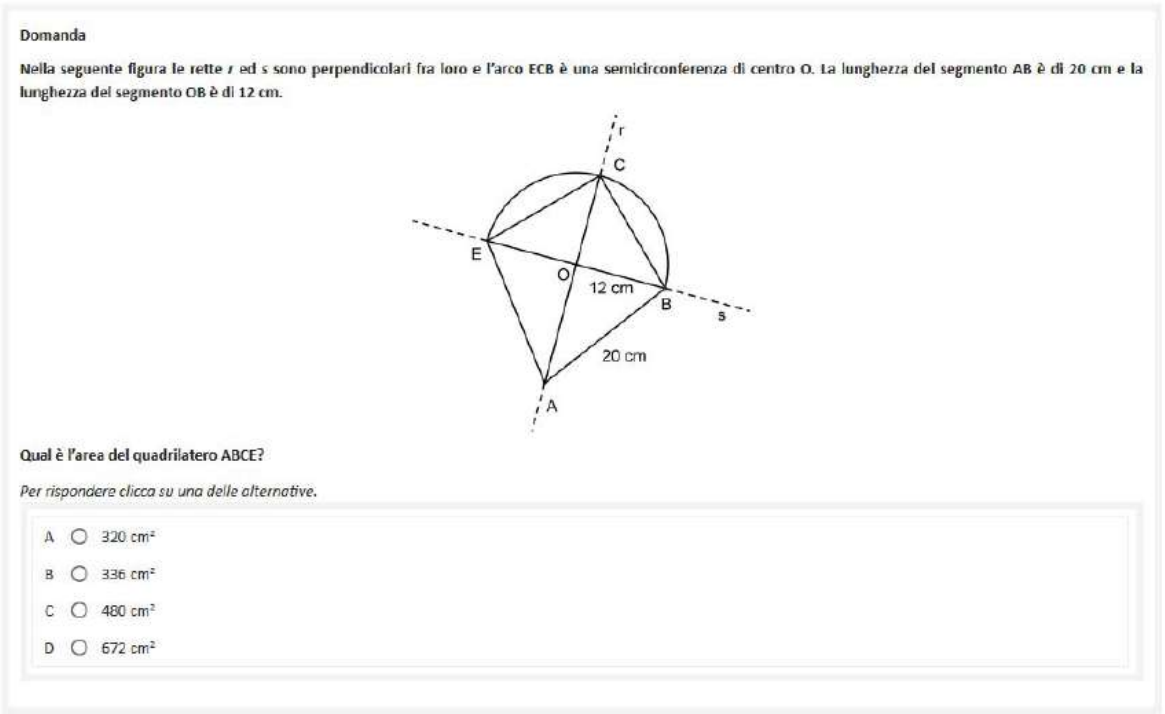
Indica se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera (V) o falsa (F).

Per rispondere clicca su una alternativa in ogni riga.

	V	F
1. Se a e b sono due numeri reali tali che $0 < a < b < 1$, allora $ab < a^2$	○	○
2. Se a e b sono due numeri reali tali che $0 < a < b < 1$, allora $a^2 < b^2$	○	○
3. Se a e b sono due numeri reali tali che $0 < a < b < 1$, allora $a + b < a$	○	○
4. Se a e b sono due numeri reali tali che $0 < a < b < 1$, allora $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$	○	○

- *Formato*: Scelta multipla complessa
- *Risposta corretta*: F - V - F - V
- *Ambito*: Numeri
- *Scopo della domanda*: Determinare il valore di verità di implicazioni relative agli ordinamenti con numeri reali senza conoscerne il valore esatto.
- *Traguardo T1*: Si muove con sicurezza nel calcolo numerico e simbolico; applica correttamente le proprietà delle operazioni con i numeri reali; realizza ordinamenti, calcola ordini di grandezza ed effettua stime numeriche e approssimazioni. Risolve equazioni e disequazioni.
- *Indicazioni Nazionali e Linee Guida*: Ordinamento dei numeri e loro rappresentazione su una retta. Rappresentazione geometrica [dei numeri] su una retta.

Esempio n. 2



Domanda

Nella seguente figura le rette *r* ed *s* sono perpendicolari fra loro e l'arco ECB è una semicirconferenza di centro O. La lunghezza del segmento AB è di 20 cm e la lunghezza del segmento OB è di 12 cm.

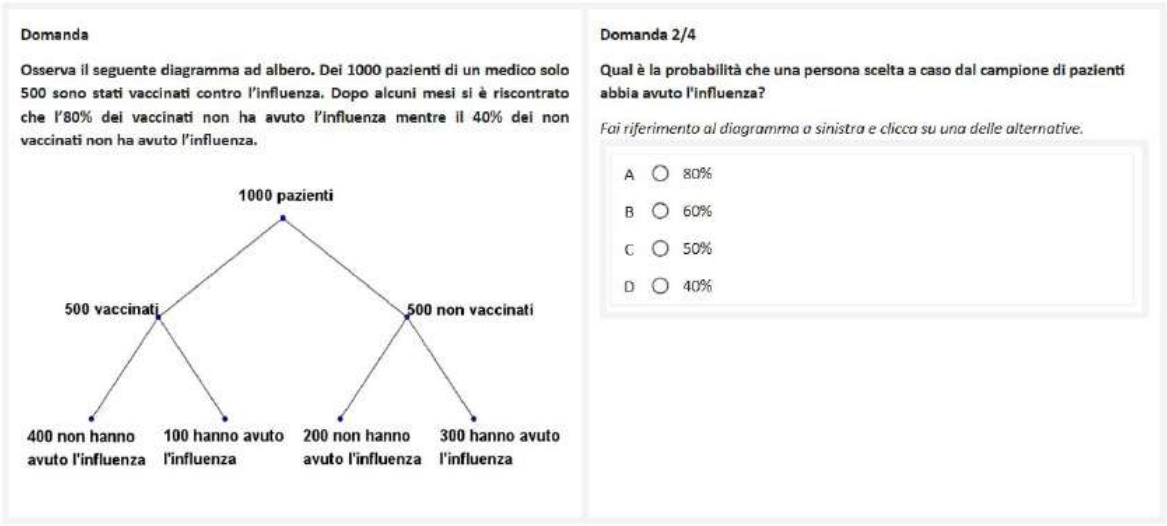
Qual è l'area del quadrilatero ABCE?

Per rispondere clicca su una delle alternative.

A ○ 320 cm²
B ○ 336 cm²
C ○ 480 cm²
D ○ 672 cm²

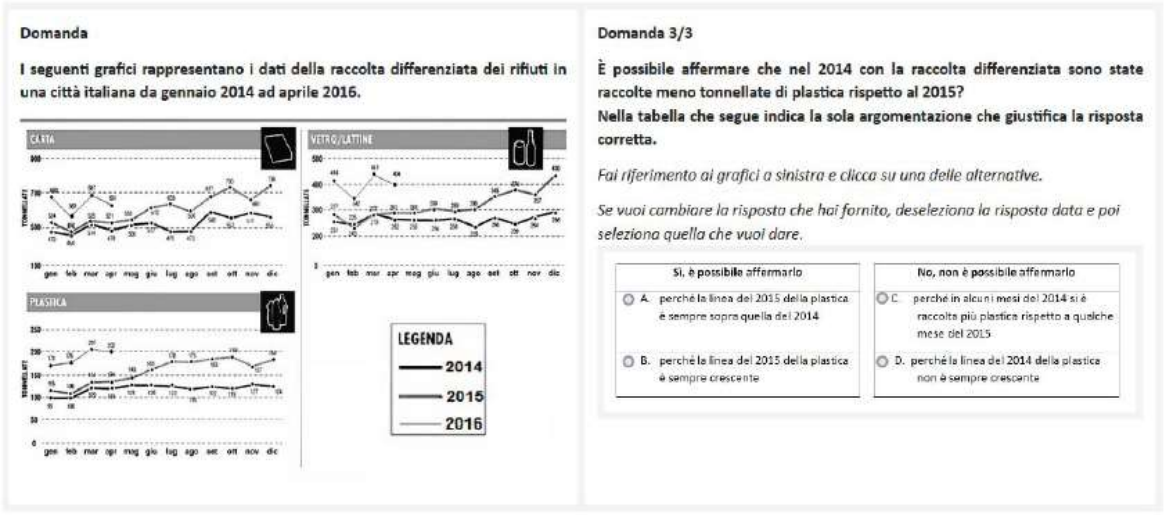
- *Formato*: Scelta multipla
- *Risposta corretta*: B
- *Ambito*: Spazio e figure
- *Scopo della domanda*: Risolvere un problema sfruttando le proprietà delle figure geometriche e il teorema di Pitagora.
- *Traguardo T4*: Riconosce e risolve problemi in contesti diversi valutando le informazioni e la loro coerenza.
- *Indicazioni Nazionali e Linee Guida*: Risolvere problemi utilizzando le proprietà geometriche delle figure.

Esempio n. 3



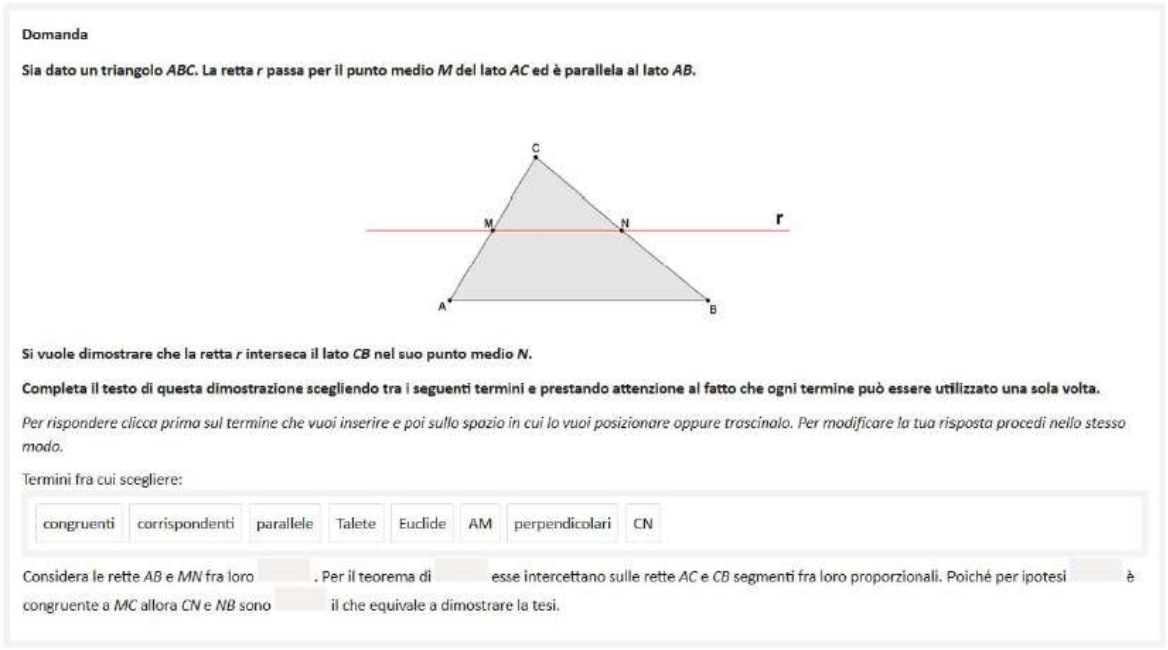
- *Formato*: Scelta multipla
- Risposta corretta: D
- *Ambito*: Dati e previsioni
- Scopo della domanda: Calcolare una probabilità da un diagramma ad albero.
- *Traguardo T12*: Esprime valutazioni e stime di probabilità in situazioni caratterizzate da incertezza. Esprime stime di probabilità di eventi composti a partire dalla conoscenza delle probabilità di eventi elementari.
- *Indicazioni Nazionali e Linee guida*: Significato della probabilità e sue variazioni. Semplici spazi (discreti) di probabilità: eventi disgiunti, probabilità composta, eventi indipendenti. Nozioni di probabilità, con esempi tratti da contesti classici e con l'introduzione di nozioni di statistica.

Esempio n. 4



- *Formato*: Scelta multipla
- *Risposta corretta*: A
- *Ambito*: Dati e previsioni
- *Scopo della domanda*: Utilizzare la visione globale di un grafico per scegliere un'affermazione relativa all'andamento di serie storiche.
- *Traguardo T8*: Comprende e utilizza diverse forme di rappresentazione, passando dall'una all'altra a seconda delle esigenze (grafica, numerica, simbolica, nella lingua naturale).
- *Indicazioni Nazionali e Linee guida*: Analisi grafica e analitica di funzioni.

Esempio n. 5



Domanda

Sia dato un triangolo *ABC*. La retta *r* passa per il punto medio *M* del lato *AC* ed è parallela al lato *AB*.

Si vuole dimostrare che la retta *r* interseca il lato *CB* nel suo punto medio *N*.

Completa il testo di questa dimostrazione scegliendo tra i seguenti termini e prestando attenzione al fatto che ogni termine può essere utilizzato una sola volta.

Per rispondere clicca prima sul termine che vuoi inserire e poi sullo spazio in cui lo vuoi posizionare oppure trascinalo. Per modificare la tua risposta procedi nello stesso modo.

Termini fra cui scegliere:

congruenti | corrispondenti | parallele | Talete | Euclide | AM | perpendicolari | CN

Considera le rette *AB* e *MN* fra loro _____. Per il teorema di _____ esse intercettano sulle rette *AC* e *CB* segmenti fra loro proporzionali. Poiché per ipotesi _____ è congruente a *MC* allora *CN* e *NB* sono _____ il che equivale a dimostrare la tesi.

- *Formato*: Cloze
- *Ambito*: Spazio e figure
- *Risposta corretta*: parallele - Talete - AM - congruenti
- *Scopo della domanda*: Completare una dimostrazione distinguendo l'ipotesi dalla tesi e scegliendo le relazioni, le implicazioni e le conoscenze da utilizzare fra quelle proposte.
- *Traguardo T7*: Produce argomentazioni esplicitando la tesi, utilizzando conoscenze e forme argomentative pertinenti alla tesi oggetto di argomentazione.
- *Indicazioni Nazionali e Linee Guida*: Il significato dei termini postulato, assioma, definizione, teorema, dimostrazione. Comprendere dimostrazioni e sviluppare semplici catene deduttive. Concetti di postulato, assioma, definizione, teorema, dimostrazione.

CAPITOLO III

LA DIDATTICA E LA MATEMATICA

Il valore che si attribuisce ai discenti come esseri umani determina il modo in cui ci si aspetta che essi imparino la loro matematica: con libertà oppure da schiavi, guidati oppure imbrigliati.

(Da «Ripensando l'educazione matematica» di Hans Freudenthal)

3.1 La didattica per competenze

Negli ultimi anni, l'acquisizione di competenze è diventata una questione centrale nell'istruzione e nella didattica dato che l'enfasi tradizionale sulla conoscenza fattuale in quanto tale non soddisfa più le esigenze di una società che cambia. Il concetto di competenza è dunque fortemente associato alla capacità di padroneggiare situazioni complesse. Si presume che superi i livelli di conoscenza e abilità, mentre il suo surplus spiega le conoscenze e le abilità da applicare in modo efficace. Naturalmente, il termine "competenza" è interessante sia per gli educatori che per i datori di lavoro, perché è facilmente identificabile con capacità, qualifiche e competenze preziose. La competenza è una qualifica molto apprezzata che tiene conto dell'uso efficace delle proprie conoscenze e abilità in un contesto specifico, solitamente complesso. L'idea di base è che la padronanza delle conoscenze e delle abilità rilevanti non è garanzia di prestazioni di successo in ambienti complessi e di conseguenza gli individui dovrebbero essere in grado di selezionare le conoscenze e le abilità disponibili in modo tale che si verifichi un comportamento efficiente ed efficace. Ciò richiede speciali "abilità" che tengano conto delle caratteristiche di un contesto specifico.

Da quanto sopra si conclude che vi sono circa due distinte denotazioni di "competenze" nell'educazione. Da un punto di vista teorico, la competenza è concepita come una struttura cognitiva che facilita comportamenti specifici. Da un punto di vista operativo, le competenze sembrano coprire un'ampia gamma di abilità e comportamenti di ordine superiore che rappresentano la capacità di far fronte a situazioni complesse e imprevedibili. Questa definizione operativa include conoscenza, abilità, attitudini, metacognizione e pensiero strategico, mentre presuppone un processo decisionale consapevole e intenzionale (Barnett, 1994).
Insegnare e apprendere in qualsiasi curriculum richiede obiettivi comuni, responsabilità condivisa e responsabilità tra insegnanti e discenti e ambienti di supporto o abilitanti per massimizzare il successo nell'apprendimento. L'apprendimento efficace è un apprendimento duraturo e capace di essere utilizzato in situazioni nuove e diverse. L'apprendimento è stato tradizionalmente concettualizzato come teoria basata su strutture accademiche in cui il successo è giudicato dalla capacità di ricordare punti chiave, informazioni impartite o dettagli e sequenze memorizzate. Il salto da questo alla capacità di ricordare, agire e esibirsi per stabilire standard di abilità e competenza è il salto in una struttura basata sulla competenza. Le competenze definite dagli organismi europei, nonché dagli esperti in materia di istruzione, consistono in tre ingredienti correlati: una componente della conoscenza (la parte che comprende); una componente comportamentale (il repertorio comportamentale palese); una componente di valore (inclusi valori, credenze e atteggiamenti). Quindi una persona competente che svolge un'attività avrà una combinazione di abilità, conoscenze, attitudini e comportamenti richiesti per l'esecuzione efficace dell'attività o del compito che le è stato affidato. Una competenza è pertanto definita come la sintesi olistica di queste componenti. A un altro livello, una competenza può essere nuovamente suddivisa in altrettanti aspetti: è la capacità di una persona di mostrare un particolare comportamento in qualcosa, un particolare contesto, una particolare qualità. Come già anticipato nei precedenti capitoli, definire la competenza è complesso, e una competenza educativa ancora di più. L'Organizzazione per la cooperazione e lo sviluppo economico (OCSE) attraverso il *PISA* (Programma per la valutazione internazionale degli studenti) ha lavorato molto sulla definizione delle competenze e ha creato un quadro per il

confronto delle competenze degli studenti ai fini della valutazione. La Commissione Europea collabora con i paesi dell'UE per rafforzare le "competenze chiave": conoscenze, abilità e attitudini che incoraggeranno gli studenti alla propria realizzazione personale e, più avanti nella vita, a trovare lavoro e a prendere parte alla società. Queste competenze chiave comprendono abilità "tradizionali" come la comunicazione nella propria lingua madre, lingue straniere, abilità digitali, alfabetizzazione e abilità di base in matematica e scienze, nonché abilità orizzontali come "apprendere a imparare", responsabilità sociale e civica, iniziativa e imprenditorialità, consapevolezza culturale e creatività. La Commissione Europea si riferisce ai termini *competenze* e *competenze chiave* preferendolo al termine *competenze di base*, in quanto generalmente riferito alle capacità di base nella lettura, scrittura e calcolo. Il termine competenza è stato infatti riferito a una "combinazione di conoscenze, abilità e attitudini appropriate al contesto". Allo stesso tempo, le "competenze chiave sono quelle di cui tutti hanno bisogno per la realizzazione e lo sviluppo personali, la cittadinanza attiva, l'inclusione sociale e l'occupazione"[3]. Fra le otto competenze chiave europee per la cittadinanza e l'apprendimento permanente vi è la competenza matematica e le competenze di base in scienza e tecnologia, oggetto della presente disamina.

Generalmente il concetto di competenza è definito come un insieme integrativo di conoscenze, abilità, attitudini e capacità che creano le premesse per il successo di determinate attività o compiti complessi e di un funzionamento efficace all'interno di un determinato contesto. A questo proposito, vale la pena ricordare che la comprensione del cosiddetto "triangolo didattico" è necessaria per sviluppare competenze didattiche tra gli insegnanti. Ogni atto pedagogico è lo spazio tra tre vertici di un triangolo pedagogico: l'insegnante, il sapere e lo studente. Il triangolo didattico fa parte di una struttura sistemica chiamata sistema didattico. Il triangolo didattico è dunque composto da tre assi: insegnante-studente, insegnante-materia e materia-studente. La forza dell'uso del triangolo didattico sta nel fatto che esso definisce diversi tipi di relazioni tra insegnante, studente e materia e la possibilità

[3] COM, 381 FINAL/2; COMUNICAZIONE DELLA COMMISSIONE AL PARLAMENTO EUROPEO, AL CONSIGLIO, AL COMITATO ECONOMICO E SOCIALE EUROPEO E AL COMITATO DELLE REGIONI UNA NUOVA AGENDA PER LE COMPETENZE PER L'EUROPA Lavorare insieme per promuovere il capitale umano, l'occupabilità e la competitività, 2016, p. 36.

di collegare queste relazioni a un contesto strutturale. Gli approcci che ne conseguono sono, dunque, tre: approccio epistemologico, sull'asse sapere-insegnante; approccio psicologico, sull'asse docente-studente; approccio pedagogico, sull'asse studente – sapere (Chevallard, Joshua, 1982).

Fig. 3.1: Il triangolo didattico, Chevallard & Joshua, 1982

In altre parole, come mostra la fig. 3.1, il triangolo didattico è una rappresentazione schematica del sistema didattico che compare in ogni mediazione di conoscenza tra insegnante e studente, ed è formato dalle interrelazioni prodotte tra i tre attanti.
L'aspetto dell'insegnamento e l'asse insegnante-studente riguardano la conoscenza delle interazioni della classe e dei processi di gruppo, nonché la capacità di gestirli. L'asse riguarda l'intuizione dell'insegnante su ciò che accade nell'aula didattica e sull'insegnante stesso/a, inclusa la leadership e il suo stile di insegnamento. Pertanto, questo asse rappresenta i micro aspetti dell'insegnamento insieme al legame tra i valori e le intenzioni dell'insegnante e la sua capacità di creare un ambiente di apprendimento costruttivo. L'aspetto retorico e l'asse insegnante-materia si riferiscono a come l'insegnante riconosce le proprie azioni in relazione alla materia, o cosa deve essere comunicato, come e perché. La comunicazione in questo senso riguarda la retorica, compresa l'esperienza dell'insegnante, l'oratoria, la comprensione del ricevente e la capacità di raggiungere un determinato obiettivo comunicativo. Questo asse riguarda l'avere un'area di conoscenza e la capacità di illustrarla. L'asse assume anche, in senso didattico, che un insegnante sia consapevole del proprio uso del tono della voce, del linguaggio del corpo, del

contatto visivo e della lavagna. Il terzo è l'asse materia-studente, che tratta di una comprensione e di una esposizione della materia in modo che lo studente possa apprendere nel modo migliore. Questo asse indica come il contenuto della materia può essere reso accessibile allo studente in modo che sia individualizzato e progressivo. Un fattore importante in questo asse è la pre-comprensione che l'insegnante assume che lo studente abbia, permettendo così allo studente di capire l'argomento e consentendo all'insegnante di credere di poter guidare l'individuo e il gruppo. Un insegnante che combini un approccio didattico consapevole con un approccio flessibile agli studenti in una situazione di insegnamento dovrebbe essere in grado di abbracciare la leadership didattica meglio di un insegnante che ha difficoltà ad adottare approcci cognitivi, fisici e verbali alternativi agli studenti (Deist, Delamare & Winterton, 2005).

In tal senso, va evidenziato che la dinamica di ogni azione educativa si basa sull'interazione tra il contenuto della materia, lo studente e l'insegnante. L'insegnante possiede la conoscenza e la dispensa, mentre lo studente, dal canto suo, acquisisce tali conoscenze frammentate, decontestualizzate e organizzate su una scala temporale dal docente stesso. È un sistema di aspettative reciproche, di negoziazione, principalmente tacito tra il professore e gli studenti, che riguarda tutti gli aspetti del loro rapporto con la conoscenza.

Secondo quest'ottica, si assiste al passaggio dalle competenze alla competenza e dai *3 savoir* (*sapere, saper fare e saper essere*) all'unico *saper agire* (e *reagire*). Pertanto, non esiste competenza senza la co-presenza di tutti questi fattori, ed essa è da intendersi come la mobilitazione di conoscenze, abilità e risorse personali, per risolvere problemi, assumere e portare a termine compiti in contesti professionali, sociali, di studio, di lavoro, di sviluppo personale; in sintesi, cioè, un "sapere agito" (Da Re, 2013).

Per riassumere, la competenza non fa riferimento ad un mero insieme di saperi, o rappresenta l'esito di un adattamento sociale dell'individuo, ma piuttosto denota una caratteristica di natura etico-morale della persona, ovvero una disposizione positiva di fronte al reale. In tal senso, la persona autonoma e responsabile che ha coscienza dei propri talenti e della propria vocazione, che possiede un senso positivo dell'esistenza, che è capace di entrare in un rapporto amichevole con la

realtà in tutte le sue dimensioni e della quale riesce a cogliere i principali fattori in gioco, è competente ed è inserita nel tessuto della vita sociale in cui agisce in modo significativo ed efficace (Nicoli, 2012).

Evidenziare tutti gli aspetti relativi al concetto di "competenza" appare quanto mai necessario per introdurre cosa si intende per "didattica per competenze", ovvero la capacità di decidere i metodi appropriati di insegnamento in modo che possano essere realizzati diversi obiettivi pedagogici. La didattica per competenze è stata sviluppata come parte essenziale della pedagogia generale e la formazione degli insegnanti e le competenze didattiche comprendono una panoramica dei diversi metodi didattici e degli approcci progettuali di istruzione, nonché una comprensione dei diversi scenari per le attività di insegnamento e apprendimento. Attraverso la didattica per competenze, è possibile rispondere ai quesiti e alle necessità degli studenti i quali celano un bisogno profondo di attribuire senso al proprio apprendimento e al proprio lavoro (Da Re, 2013).

Per tale ragione, la didattica per competenze fa esplicito riferimento alla vita quotidiana e alle esperienze di bambini e ragazzi per affrontare specifici problemi. Tenendo in considerazione le tre dimensioni dell'istruzione, ovvero *aumento della competizione cognitiva, aumento della capacità di agire* e *aumento della capacità di riflessione,* è bene evidenziare come questa nuova tipologia di didattica aiuti lo studente ad espandere il proprio orizzonte di conoscenza anche avvalendosi dell'ausilio di nuove tecnologie e nuove forme di comunicazione. L'apprendimento basato sulle competenze è dunque un approccio all'educazione che si concentra sulla dimostrazione da parte dello studente dei risultati di apprendimento desiderati, che sono considerati centrali e significativi per il processo di apprendimento stesso, e riguarda principalmente la progressione di uno studente attraverso il suo curriculum seguendo i suoi tempi. La differenza principale rispetto ai tradizionali metodi didattici è che l'apprendimento basato sulla competenza si focalizza su abilità osservabili o "competenze" (Kouwenhoven, 2009).

La caratteristica più rilevante della didattica per competenze è legata al fatto che essa misura l'apprendimento piuttosto che il tempo dell'apprendimento stesso. Gli studenti progrediscono dimostrando la propria competenza, ovvero avvalorando le proprie conoscenze e abilità indipendentemente dal tempo impiegato.

L’apprendimento va modellato piuttosto che controllato supportando tutte le dimensioni coinvolte, cognitiva, psicomotoria e affettiva, promuovendo nello studente tutta una serie di competenze di base che gli consentono di progredire in maniera efficace ed efficiente nel suo apprendimento. Seguendo questa logica, ai docenti si chiede di impostare la didattica e l’insegnamento in modo che gli alunni possano avvicinarsi al sapere attraverso l’esperienza e acquisire la teoria attraverso un percorso induttivo, che passi dall’esperienza per giungere alla sua rappresentazione (Da Re, 2013). Per quel che concerne le dimensioni coinvolte in questo processo, è fondamentale concentrarsi sui risultati, ovvero ciò che uno studente sa e può fare, piuttosto che sul modo in cui lo studente apprende e sul tempo che impiega per apprendere. Per quel che riguarda la dimensione psicomotoria, è importante organizzare sufficienti esperienze pratiche che richiedano l'esecuzione effettiva delle competenze, sotto supervisione diretta, per una successiva valutazione. Per quel che concerne le competenze relazionali ed affettive è importante puntare l’attenzione sui valori personali, fornire un quadro delle attività degli studenti per comprenderne i risultati misurabili, organizzare una discussione su diversi valori e convinzioni, creare uno strumento di valutazione valido e affidabile da utilizzare per determinare le buone pratiche e l'integrità delle competenze. Per quel che riguarda la dimensione cognitiva è significativo puntare sulla scoperta, sulla risoluzione di problematiche, sulla riflessione e il dibattito, al fine di determinare l'approccio alla competenza più appropriato. Altre strategie, legate alle dimensioni sopra citate, includono moduli di autoapprendimento, attività che prevedano la relazione e l’interazione all’interno della classe, ovvero la discussione, il dialogo e la chiarificazione dei concetti da apprendere. A tal proposito, i docenti devono anche incoraggiare lo studente nell’utilizzo delle proprie conoscenze e nella manifestazione delle proprie idee per trovare possibili soluzioni. Una delle strategie più efficaci per guidare lo studente a scoprire come procedere o agire è chiamata *interrogazione socratica*, il cui scopo principale è quello di incoraggiare l’alunno a sfidare il proprio pensiero, a revisionarlo sapendo che ciò potrebbe condurlo verso l’obiettivo di diventare competente, di ampliare le proprie conoscenze ed abilità, di utilizzare il proprio pensiero critico integrandolo ad un apprendimento pratico ed esperienziale. L'insegnante diventa un “allenatore”

o un facilitatore dell'apprendimento, piuttosto che un saggio onnisciente che dice al discente cosa imparare, come apprendere e cosa fare con la nuova conoscenza acquisita. L'apprendimento basato sulle competenze è, invece, un modo per strutturare le attività di apprendimento in modo che lo studente possa soddisfare un insieme predeterminato di competenze. Dato che gli studenti hanno una varietà di modi di apprendimento o di stili di apprendimento, è importante per loro riconoscere che l'apprendimento basato sulla competenza richiederà che essi eseguano, compiano azioni, realizzino qualcosa grazie all'esperienza, piuttosto che imparare dalla mera osservazione. L'osservazione, la riflessione e l'ascolto sono importanti dimensioni di apprendimento, ma la dimostrazione delle competenze è il risultato più atteso di questa tipologia di didattica basata sulle competenze (Voorhees, 2001).

Negli ultimi anni la didattica basata sulle competenze e i suoi approcci all'insegnamento e all'apprendimento sono state accolte di buon grado all'interno dei vari sistemi educativi soprattutto per la sua dimensione esperienziale, laboratoriale e dinamica che include, peraltro, una definizione chiara e basata sull'evidenza dei risultati e degli obiettivi di apprendimento, nonché dei criteri di rendimento, ovvero delle competenze specifiche. A questo proposito, gli obiettivi di competenza devono includere risultati, criteri, standard di prestazione, condizioni che sono tangibili, misurabili e pertinenti. Le persone imparano a ritmi diversi e in modi diversi, quindi una serie di dimostrazioni o attività può essere sufficiente per uno studente a dimostrare competenza, mentre lo stesso livello di prestazioni di questa abilità con un'altra persona richiederà molto di più per raggiungere lo stesso risultato di apprendimento. Questa comprensione dei bisogni del discente è la ragione principale per cui la didattica basata sulle competenze può includere l'osservazione diretta della dimostrazione delle competenze nel tempo e le chiare definizioni e classificazioni dei risultati e degli obiettivi di apprendimento stesso. La chiarezza di obiettivi e risultati attesi è vitale sia per gli insegnanti che per gli studenti in quanto rende possibile focalizzare l'attenzione sui bisogni e sugli stili di apprendimento degli studenti, fornendo loro il tempo necessario per acquisire e ripetutamente eseguire o dimostrare le competenze previste creando, inoltre, un ambiente favorevole all'apprendimento. Questa didattica basata sulla competenza

può essere perseguita attraverso vari approcci all'insegnamento. Tuttavia, tutti i curricula devono essere basati sull'evidenza e focalizzati sui risultati e tutte le strategie di insegnamento devono essere abbinate al loro ambito di apprendimento (psicomotorio, cognitivo e affettivo). L'apprendimento basato sulla competenza pone l'accento su ambienti di apprendimento ricchi e dinamici che consentono agli studenti di impegnarsi in processi di apprendimento significativi. Le caratteristiche più distintive di questo approccio possono essere riassunte come segue (O'Sullivan, Burce, 2014):

- *Contesti significativi*

L'insegnante creerà o cercherà contesti significativi in cui gli studenti sperimenteranno in modo naturale la rilevanza e il significato delle competenze da acquisire.

- *Approccio multidisciplinare*

Le competenze sono olistiche e, di conseguenza, l'approccio educativo deve essere anche integrativo e olistico.

- *Apprendimento costruttivo*

La filosofia della didattica basata sulle competenze ha le sue radici nel costruttivismo sociale. Quindi, gli studenti si impegnano in un processo di costruzione della propria conoscenza per una più efficace interazione con il proprio ambiente, piuttosto che come un processo di assorbimento della conoscenza che l'insegnamento tradizionale potrebbe provare a trasferire loro.

- *Apprendimento cooperativo e interattivo*

L'idea alla base della didattica per competenze è quella di supportare gli studenti nello sviluppo e la costruzione delle proprie conoscenze, cercando peraltro di fare un uso ottimale anche della competenza delle persone che incontrano nel loro percorso di apprendimento. Per i risultati dell'apprendimento finalizzati allo sviluppo di competenze individuali e personali, l'approccio deve tenere conto della diversità delle esigenze degli studenti per raggiungere gli obiettivi. Ciò richiede un approccio aperto in cui l'educazione includa dialoghi tra discenti ed educatori su aspettative, bisogni, obiettivi, scelte.

- *Apprendimento alla scoperta*

L'apprendimento alla scoperta significa rendere i contenuti disponibili, accessibili e sperimentabili diversamente da un mero processo di fornitura di informazioni e dunque basato sulla scoperta.

- *Apprendimento riflessivo*

Poiché lo studente riflette sui propri bisogni, motivazioni, approcci, progressi, risultati, egli sviluppa competenze di apprendimento che possono essere considerate "apprendere per imparare", ovvero organizzare il proprio apprendimento, individuando, scegliendo e utilizzando varie fonti e varie modalità di informazione e di formazione (formale, non formale e informale), anche in funzione dei tempi disponibili, delle proprie strategie e del proprio metodo di studio e di lavoro.

- *Apprendimento personale*

Nelle teorie orientate alle competenze l'apprendimento è concepito come un processo di costruzione delle proprie conoscenze e competenze personali. Informazioni, conoscenze, strategie diventano significative per una persona solo se diventano parte integrante del proprio corpus di conoscenze e competenze. Nell'educazione ciò implica che gli studenti siano in grado di identificarsi con i contesti, le persone, le situazioni e gli interessi che sono inclusi nei domini di apprendimento coinvolti. Una didattica fondata sull'acquisizione ed il rafforzamento delle competenze non solo valuta i contenuti, ma li coltiva e li approfondisce. È importante che lo studente colga con chiarezza il senso di un concetto o di un processo, che lo interiorizzi e lo utilizzi bene. È inoltre fondamentale invitare lo studente a ripercorrere mentalmente i processi per diventarne consapevole e usarli poi in altri contesti (Cerini, 2013).

Volendo riassumere tutte le dimensioni coinvolte in questa tipologia di didattica per competenze, è importante evidenziare il fatto che essa si avvale di diverse strategie e tecniche sia didattiche sia di organizzazione del gruppo classe:

> […] l'apparato tradizionale di didattiche di trasmissione delle conoscenze e di esercitazione di procedure (lezione frontale, esercitazione ecc.); la contestualizzazione dei concetti, dei principi, dei contenuti disciplinari nella realtà e nell'esperienza; la proposizione in chiave problematica e interlocutoria dei contenuti di conoscenza e l'utilizzo di mediatori e tecniche didattiche vari e flessibili per

> valorizzare i diversi stili cognitivi e di apprendimento degli allievi; la valorizzazione dell'esperienza dell'allievo attraverso la proposta di problemi da risolvere, situazioni da gestire, prodotti da realizzare in autonomia e responsabilità, individualmente e in gruppo, utilizzando le conoscenze e le abilità già possedute e acquisendone di nuove, attraverso le procedure di problem solving e di ricerca; la riflessione e la riformulazione metacognitive continue, prima, durante e dopo l'azione, per trovare giustificazione, significato, fondamento e sistematizzazione al proprio procedere; l'apprendimento in contesto sociale e cooperativo per dare rilievo ai contributi, alle capacità e alle attitudini diverse e per favorire la mutua collaborazione e la reciprocità" (Da Re, 2013, p.20).

In tal senso, un apprendimento che punta al raggiungimento di competenze, presenta i seguenti caratteri: *attivo*, perché consapevole e responsabile, *costruttivo*, perché il soggetto integra le nuove conoscenze con le precedenti, *collaborativo*, perché il soggetto lavora in una comunità costruttiva, *intenzionale*, perché il soggetto è coinvolto fattivamente nel conseguimento di obiettivi conosciuti e condivisi, *conversazionale*, perché è forte la dimensione dialogica dell'apprendimento, *contestualizzato*, perché i compiti assumono significatività nel mondo reale, *riflessivo*, perché il soggetto riflette sui processi e sulle decisioni (Jonassen, 1994).

Il compito importante dell'insegnante è quello di predisporre le condizioni cognitive, affettive e relazionali che in un dato contesto consentano allo studente di costruire le proprie conoscenze e abilità al fine di conseguire mete formative importanti per vivere bene all'interno di un dato contesto sociale. Un sapere quindi che non è solo il risultato dell'assimilazione d'informazioni attraverso l'apprendimento, ma che permetta veramente agli alunni di capire il motivo per cui si ottengono certi risultati piuttosto di altri, operando in un certo modo e rispettando determinate procedure (Sacchella, 2014).

La didattica per competenze non implica l'abbandono dei contenuti che invece rappresentano quel "campo di esperienza in cui esercitare abilità e competenze" (Da Re, 2013). Certamente, tali contenuti vanno analizzati e selezionati e trasformati, proprio attraverso la didattica per competenze, in conoscenze ovvero in "patrimonio permanente dell'allievo" (Ibidem). Le conoscenze supporteranno le abilità e le competenze dello studente, rendendolo capace di agire e di re-agire di fronte ai problemi, ricorrendo a tutte le risorse personali e agendo in autonomia e responsabilità. L'obiettivo della didattica per competenze è, dunque, mettere lo studente al centro del processo educativo al fine di agire sulle sue potenzialità

rendendo le azioni, le riflessioni e le sue abilità pratiche la principale fonte del suo apprendimento.

3.2 Progettare per traguardi formativi

L'esperienza che ogni singolo studente vive è vista in una prospettiva evolutiva, continua, graduale ma unitaria. I percorsi di conoscenza sono progressivamente orientati allo sviluppo di competenze ed alla ricerca di connessioni tra i diversi saperi. Un altro elemento di forte innovazione di questa nuova didattica basata su competenze ed esperienza è l'attenzione sempre maggiore ad una solida acquisizione delle conoscenze e competenze di base, fissando anche traguardi per il loro sviluppo. L'azione educativa è dunque finalizzata allo sviluppo integrale dell'allievo. Sono molti anche i segnali che l'insegnante dovrà essere in grado di cogliere per innovare la sua metodologia didattica e tradurla in dimensioni di inclusività, partecipazione, collaborazione e responsabilità, definendo le proprie proposte in una relazione costante con i bisogni fondamentali e i desideri degli studenti.

Il curricolo dello studente è dunque l'insieme delle esperienze di apprendimento che una comunità scolastica progetta, attua e valuta in vista di obiettivi formativi esplicitamente espressi (Pellerey, 2004). Nell'ottica del successo formativo dello studente e dell'intero sistema educativo, i docenti sono chiamati a progettare il curricolo verticale definendo i traguardi per lo sviluppo delle competenze da raggiungere, che orientano e sostengono l'azione didattica per la piena realizzazione del profilo auspicato. Come mostra la fig. 3.2, il curricolo verticale consente di superare l'ormai tradizionale prassi del programma per sostenere la nuova prassi del curricolo per competenze, che è cosa molto diversa dalla precedente progettazione didattica. Vi è altresì la necessità di individuare i bisogni e i traguardi formativi al fine di progettare interventi mirati e progressivi che si allontanino sempre di più da rigidi schematismi. Gli obiettivi di apprendimento sono il mezzo per il raggiungimento dei traguardi formativi e di sviluppo delle competenze.

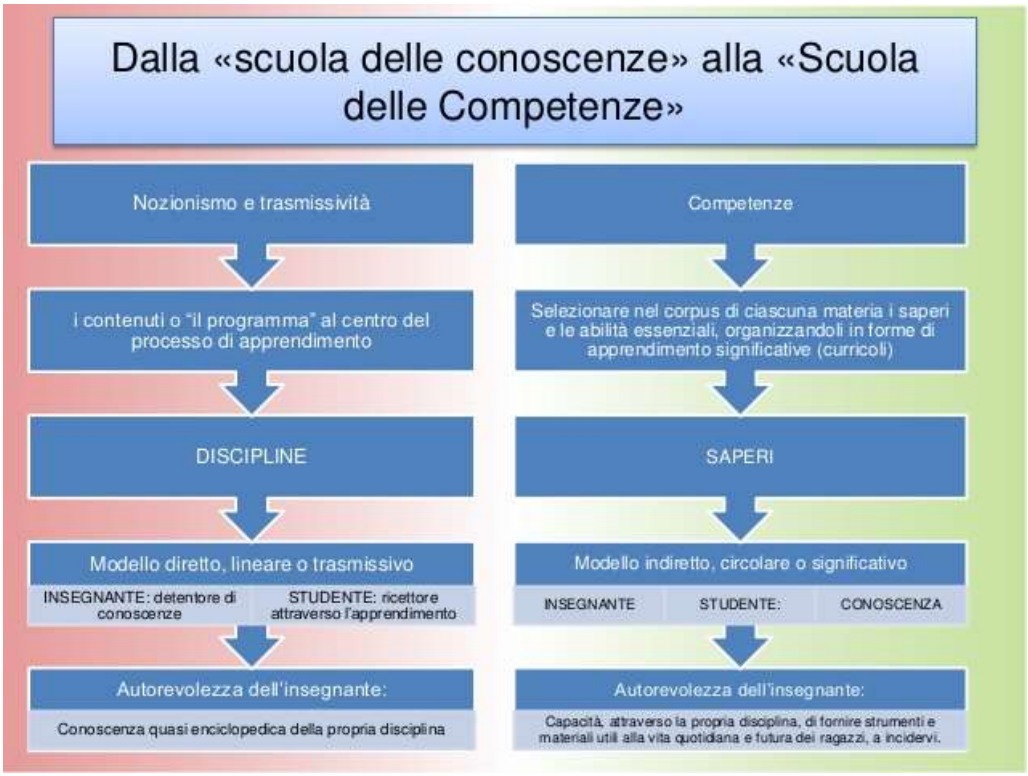


Fig. 3.2: Didattica per competenze. Orientamenti e indicazioni pratiche, Guasti, 2012, p. 69.

Risulta auspicabile, dunque, una progettazione didattica ampia, che coinvolge più dimensioni. A questo proposito, l'integrazione delle varie discipline, dalle lingue straniere alla matematica, dalle competenze civiche e sociali a quelle computazionali, per spiegare la complessità della realtà, nonché la costruzione di conoscenze e abilità attraverso l'analisi di problemi e la gestione di situazioni complesse, la cooperazione e l'apprendimento sociale, la sperimentazione, l'indagine, la contestualizzazione nell'esperienza, la laboratorialità, sono tutti fattori imprescindibili per sviluppare competenze, apprendimenti stabili e significativi, dotati di significato e di valore per la cittadinanza (Pellerey 2004).

Il *backward design*, ideato da Wiggins e McTighe (1998), è un metodo di progettazione del curriculum educativo che fissa degli obiettivi ancor prima di scegliere i metodi didattici e le forme di valutazione. Il *backward design* prevede in genere tre fasi: identificare i risultati desiderati, determinare livelli accettabili di prove che supportino il fatto che i risultati desiderati si siano verificati, progettare attività che consentano di ottenere i risultati desiderati. Il *backward design* sfida i

metodi "tradizionali" di pianificazione del curriculum che prevedeva la creazione o la selezione di un elenco di contenuti da insegnare. Nel *backward design*, l'educatore inizia con gli obiettivi, crea o pianifica le valutazioni e alla fine prepara i *lesson plan*. Il *backward design* prevede l'utilizzo di una "road map": la destinazione viene scelta per prima e quindi la mappa viene utilizzata per pianificare il viaggio verso la destinazione desiderata. Al contrario, nella pianificazione tradizionale del curriculum non esiste una destinazione formale identificata prima dell'inizio del viaggio (Wiggins, McTighe, 1998, pp. 7-19).

Il *backward design* viene spesso utilizzato in combinazione con altri due termini: progettazione del curriculum e progettazione didattica. La progettazione del curriculum è l'atto di progettare o sviluppare programmi di studio per gli studenti. I curricula, che comunque possono differire geograficamente parlando, si basano su specifici standard di riferimento stabiliti a livello nazionale. La progettazione didattica è finalizzata allo sviluppo di esperienze e ambienti di apprendimento che promuovono l'acquisizione di conoscenze e abilità specifiche da parte degli studenti. Inoltre, i modelli di progettazione didattica possono essere pensati come strutture per lo sviluppo di moduli o lezioni che aumentano la possibilità di apprendimento e incoraggiano l'impegno degli studenti in modo che imparino più velocemente e acquisiscano livelli più profondi di comprensione. Esistono numerosi modelli di progettazione didattica disponibili e che hanno un'importanza significativa durante la pianificazione e l'implementazione del curriculum degli studenti. Molti dei modelli sono abbastanza simili in quanto sostanzialmente si indirizzano alle stesse quattro componenti: 1) gli studenti; 2) gli obiettivi di apprendimento; 3) il metodo di insegnamento 4) la valutazione. Basandosi su queste componenti, l'insegnante ha quindi l'opportunità di scegliere il modello di progettazione e le fasi che funzionano meglio in una situazione specifica. In questo modo si possono raggiungere risultati di apprendimento appropriati o creare un piano o una strategia di miglioramento (Ivi, pp. 24-27).

Il punto di partenza del *backward design* è quello di familiarizzare con gli standard/risultati stabiliti a seconda del grado di istruzione e del curriculum di ogni studente. Certamente, può risultare difficile per i docenti che prediligono modelli più "tradizionali" applicare il *backward design* e concettualizzare una valutazione

prima di decidere lezioni e istruzioni da dare agli studenti. L'idea è che le valutazioni soddisfino gli obiettivi iniziali identificati. Per facilitare la concretizzazione del modello, Wiggins e McTighe utilizzano l'approccio "WHERE" durante la fase di valutazione del processo: *W* indica gli studenti che sanno dove stanno andando, perché stanno andando lì, cosa sanno, cosa potrebbe non funzionare nel processo e cosa è richiesto loro; *H* sta per *hooking*, ovvero "agganciare" gli studenti all'argomento di studio; *E* sta ad indicare gli studenti che esplorano e sperimentano idee e sono dotati della necessaria comprensione per padroneggiare l'argomento di studio e raggiungere così gli obiettivi attesi; *R* sta per *rethinking*, ovvero fornire agli studenti l'opportunità di provare, rivedere e perfezionare il proprio lavoro; infine, *E* sta per *evaluation*, ossia la valutazione degli studenti (Wiggins, McTighe, 2008).

In altre parole, gli stadi di questa progettazione sono i seguenti (Ibidem):

Fase 1: identificare i risultati desiderati

Cosa dovrebbero sapere, capire e essere in grado di fare gli studenti? Quali sono i contenuti prioritari? In questa prima fase, consideriamo gli obiettivi, esaminiamo gli standard di contenuto stabiliti da indicazioni o direttive nazionali o distrettuali ed esaminiamo le aspettative del curriculum. Tuttavia, delle scelte devono essere prese e questa prima fase del processo di progettazione richiede innanzitutto chiarezza in merito proprio alle priorità.

Fase 2: determinare evidenze di apprendimento

Come è possibile sapere se gli studenti hanno raggiunto i risultati desiderati, se hanno compreso e sviluppato le loro competenze? Il *backward design* suggerisce di pensare ad un'unità o un corso in termini di prove di valutazione raccolte e necessarie per documentare e convalidare che l'apprendimento desiderato sia stato raggiunto, piuttosto che come mero contenuto da apprendere o come una serie di attività di apprendimento. Questo approccio incoraggia gli insegnanti e coloro che pianificano il curriculum degli studenti a "pensare come dei valutatori" prima di progettare unità e lezioni specifiche, e quindi a considerare in anticipo come sarà possibile stabilire o meno il risultato ottenuto.

Fase 3: pianificare esperienze di apprendimento

Questa fase rappresenta il momento in cui è necessario pensare pienamente alle attività didattiche più appropriate, ponendosi interrogativi chiave: quali conoscenze (fatti, concetti, principi) e abilità (processi, procedure, strategie) saranno necessari agli studenti per ottenere risultati efficaci e desiderati? Quali attività forniranno agli studenti le conoscenze e le competenze necessarie? Cosa dovrà essere insegnato e come dovrebbe essere fatto, alla luce degli obiettivi di rendimento? Quali materiali e risorse sono più adatti per raggiungere questi obiettivi?

Una progettazione didattica flessibile ma mirata impone sia agli insegnanti che a coloro che si occupano di strutturare il curriculum un importante cambiamento nel modo di pensare la natura del proprio lavoro. Il processo finora descritto e analizzato richiede una lunga riflessione, in primo luogo, sugli specifici approcci da mettere in campo e su come rendere tangibile questo apprendimento, e in secondo luogo a ciò che l'insegnante farà o fornirà durante le attività di insegnamento e apprendimento. Sebbene sia difficile, la sfida sta proprio nel concentrarsi prima sugli insegnamenti desiderati da cui, successivamente, l'insegnamento seguirà logicamente. Le lezioni, le unità di apprendimento e i corsi dovrebbero essere logicamente dedotti dai risultati ricercati e non derivati da metodi, libri e attività con cui siamo più a nostro agio. Il curriculum dovrebbe indicare i modi più efficaci per ottenere risultati specifici: i migliori progetti vanno a ritroso (*backward*) e prendono il via dagli apprendimenti ricercati. L'adeguatezza di questo approccio diventa più chiara quando consideriamo lo scopo educativo che vi è al centro, ovvero l'apprendimento, considerato come "comprensione profonda" dei contenuti curricolari da trasferire poi nei contesti di vita (Ibidem).

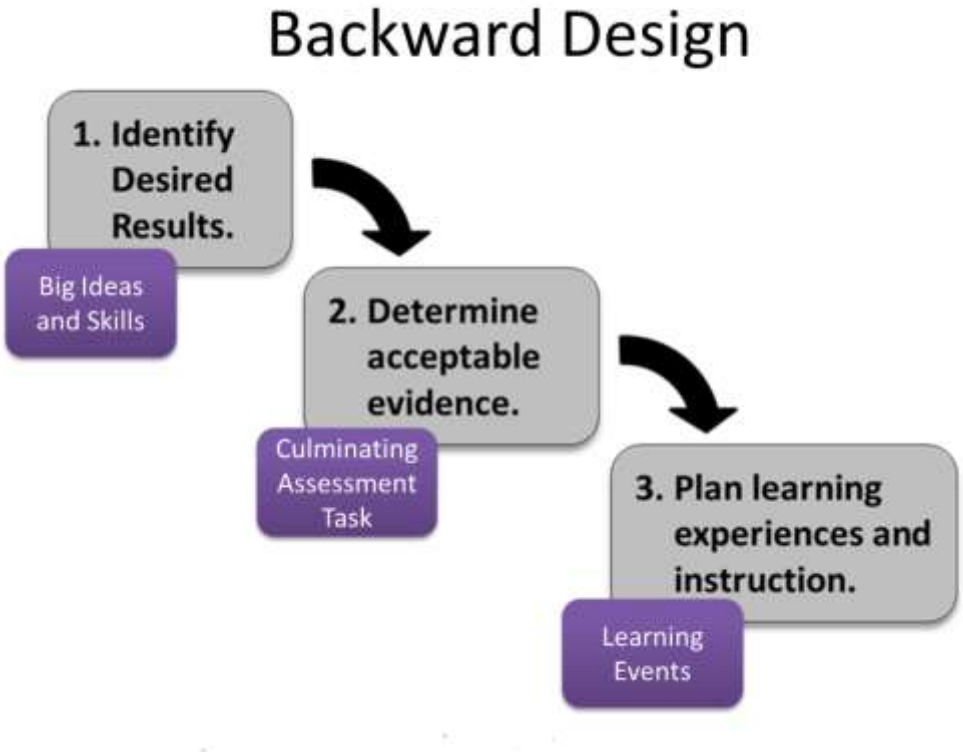


Fig. 3.3: Il backward design, Wiggins, McTighe, 2008, p. 73

Il modello proposto dai due autori delinea una sorta di ribaltamento della progettazione didattica tradizionale secondo cui il docente parte dalla programmazione degli interventi didattici per poi passare a strutturarne la valutazione. Il modello *backward*, come si evince dalla fig. 3.3, propone, innanzitutto, di riflettere sulla competenza che si intende sviluppare, sulla base del profilo dello studente, analizzarla insieme alle dimensioni che concorrono alla sua manifestazione, e determinare così le più opportune azioni di valutazione. Solo dopo questi passaggi si può procedere alla pianificazione delle singole attività didattiche (Castoldi, 2011). Questo tipo di progettazione consente di mantenere una certa coerenza tra i risultati di apprendimento desiderati, le prestazioni degli studenti e gli interventi didattici.

Secondo questo modello, l'apprendimento è dunque il processo in grado di costruire la conoscenza delle persone che stanno cercando di comprendere il mondo, in un certo ambiente sociale e culturale. La costruzione della conoscenza personale

dipende dalla situazione individuale e segue tre fasi: osservazione del mondo, elaborazione delle informazioni raccolte e interpretazione, ovvero la ricostruzione delle conoscenze precedenti degli studenti. I risultati dell'apprendimento possono essere ottenuti quando gli studenti hanno un contesto in cui possono applicare ciò che hanno appreso in quanto il processo di apprendimento è radicato o situato nel contesto e nei contenuti specifici delle attività che lo generano. In particolare, la conoscenza è acquisita per uno scopo personale riconoscibile dallo studente che, successivamente, deve renderlo tangibile e applicabile. Gli insegnanti costruttivisti mantengono il ruolo di guida e di leader, con l'obiettivo di incoraggiare e orientare lo sforzo costruttivo degli studenti (Ibidem).

La prospettiva diventa l'espressione di un paradigma in grado di cambiare profondamente l'idea di conoscenza quale processo globale e trasformativo e non solo un atto formale e un atto superficiale (Castoldi, 2010).

> Il progetto didattico diviene un percorso di apprendimento/insegnamento finalizzato allo sviluppo di competenze nel soggetto e centrato su una situazione-problema da affrontare, la quale rappresenta la cornice di senso entro cui collocare le diverse azioni previste dal progetto stesso (Castoldi, 2011 p. 142).

Il progetto didattico viene definito, così, da due concetti: quello di competenza che precisa i traguardi formativi che si vogliono sviluppare e quello di situazione-problema che sintetizza il punto di partenza e il punto di arrivo del percorso didattico e lo qualifica come un percorso strutturato di soluzione condivisa di un problema dotato di senso per coloro che ne sono coinvolti (Ibidem). La situazione-problema è un problema da risolvere in un dato contesto operativo, all'interno dei vincoli e delle risorse che il contesto stesso pone. Il processo di apprendimento va considerato in una prospettiva socio-costruttivista, come pratica consapevole guidata da intenzioni e da una continua riflessione, ovvero secondo il triangolo intenzione-azione-riflessione. Il processo di apprendimento sarà quindi: attivo, costruttivo, collaborativo, intenzionale, conversazionale, contestualizzato e riflessivo. Lo studente mette in campo tutte le risorse di cui dispone attraverso un rapporto dialettico tra intenzione da perseguire, riflessione sul proprio agire e percezione del contesto (Ibidem).

> "La didattica per competenze implica allora la progettazione di attività significative e coinvolgenti. Solo di fronte a problemi complessi e sfidanti gli studenti possono mobilitare le risorse interne e quelle esterne disponibili per giungere a soluzioni innovative ed efficaci" (Castoldi, 2011, p. 68).

Fig. 3.4: Didattica per competenze (Castoldi, 2009, p. 32)

In definitiva, come mostra la fig. 3.4, alla luce di anche quanto finora detto, nella progettazione verranno indicati:

- *i traguardi di sviluppo delle competenze* riferimenti ineludibili per gli insegnanti, in quanto indicano "le piste culturali e didattiche da percorrere e aiutano a finalizzare l'azione educativa allo sviluppo integrale dell'allievo"[4];
- *gli obiettivi di apprendimento* devono definire in modo chiaro e inequivocabile "conoscenze e abilità ritenuti indispensabili al fine di raggiungere i traguardi per lo sviluppo delle competenze" (Ibidem);
- *le esperienze significative di apprendimento* traguardate e programmate nella loro realizzazione operativa, sotto il profilo sia dello sviluppo cognitivo che di quello personale e culturale degli studenti;
- l'uso di *metodologie didattiche* differenziate e personalizzate nonché orientate a sviluppare sistemi di padronanza dei compiti e dei problemi, valorizzando l'apprendimento esperienziale, l'esplorazione e la scoperta, il lavoro di interazione e collaborazione tra pari valorizzando l'esperienza e le

[4] MIUR, Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo di istruzione, op. cit., p. 13.

conoscenze di ciascuno. Nello specifico, la classe funge da laboratorio che favorisce l'operatività e allo stesso tempo il dialogo e la riflessione su quello che viene fatto. Se efficientemente organizzata, "*la modalità di lavoro che meglio incoraggia la ricerca e la progettualità, coinvolge gli alunni nel pensare, realizzare, valutare attività vissute in modo condiviso e partecipato con altri, e può essere attivata sia nei diversi spazi e occasioni interni alla scuola sia valorizzando il territorio come risorsa per l'apprendimento*" (Ivi, p. 27);

- la *flessibilità progettuale* che facilita, per tutti gli studenti, il raggiungimento dei migliori risultati possibili attraverso la predisposizione di itinerari didattico-educativi personalizzati coerenti con i lori ritmi di apprendimento. La flessibilità incoraggia e valorizza le diversità e le potenzialità di tutti;
- la predisposizione di *modalità di valutazione formativa*, ossia la rilevazione dei cambiamenti. Verificare le esperienze di apprendimento e delle azioni educative intraprese e realizzate, nonché analizzare gli ostacoli, gli insuccessi e i risultati, assume una preminente funzione formativa, di accompagnamento dei processi di apprendimento e di stimolo al miglioramento continuo;
- la *rendicontazione sociale del lavoro* come scelta educativa. Il docente ha il dovere di giustificare le scelte effettuate, gli impegni presi e i risultati ottenuti con l'autonomia della propria azione. Tale scelta "*assume valore sociale nel momento in cui è volontaria ed intenzionale*" (Previtali, 2011), e apre quindi a dimensioni etiche in cui il bilancio sociale è uno strumento di lavoro.

Progettare quindi è "il modo con cui si intende procedere verso il cambiamento" (Guasti, Plessi, 2014, p. 5) tenendo conto della realtà, delle sue risorse delle sue potenzialità, ma anche dei suoi vincoli e limiti. Un insegnante che progetta a scuola deve essere consapevole che le scelte progettuali che compie, contribuiscono ad orientare l'allievo nella costruzione del suo progetto di vita (Janes et al., 2003).

3.3 La didattica della matematica

Stiamo vivendo un periodo di transizione dalla conoscenza relativamente stabile dei tempi precedenti, a uno stadio di conoscenza straordinariamente complessa, abbondante e in rapida evoluzione. In questa nuova società della conoscenza, è conveniente che i cittadini abbiano una cultura ampia, ricca, tecnologica e in costante crescita e considerata un'astrazione, un costrutto sociale con una base teorica condivisa da individui appartenenti allo stesso gruppo. La conoscenza matematico-scientifica rientra all'interno di tale costrutto.

La maggior parte dei cittadini, di tutti i paesi, viene progressivamente coinvolta in una moltitudine di compiti che includono concetti quantitativi, spaziali, rappresentativi, interpretativi, argomentativi, probabilistici e altri compiti matematici. Non si tratta solo di matematica strumentale o applicativa, ma anche di matematica formativa poiché contribuiscono allo sviluppo intellettuale, favorendo strutture mentali e determinate capacità come l'astrazione, la generalizzazione, il pensiero riflessivo, il ragionamento logico e così via. La competenza matematica consiste nella capacità di usare e mettere in relazione i numeri, le loro operazioni di base, i simboli e le forme di espressione e il ragionamento matematico, sia per produrre e interpretare diversi tipi di informazioni, sia per ampliare le conoscenze sugli aspetti quantitativi e spaziali della realtà, e per risolvere problemi legati alla vita quotidiana e al mondo del lavoro. La competenza matematica è stata strutturata in grandi blocchi ovvero dimensioni, ognuna delle quali raggruppa tutta una serie di sotto-competenze: per ciascuna di queste sono identificati degli indicatori di valutazione, che sono i compiti o le operazioni specifiche che gli studenti dovrebbero essere in grado di sviluppare per dimostrare la padronanza di quella specifica competenza. In tal senso, l'apprendimento della matematica passa attraverso molteplici aspetti:

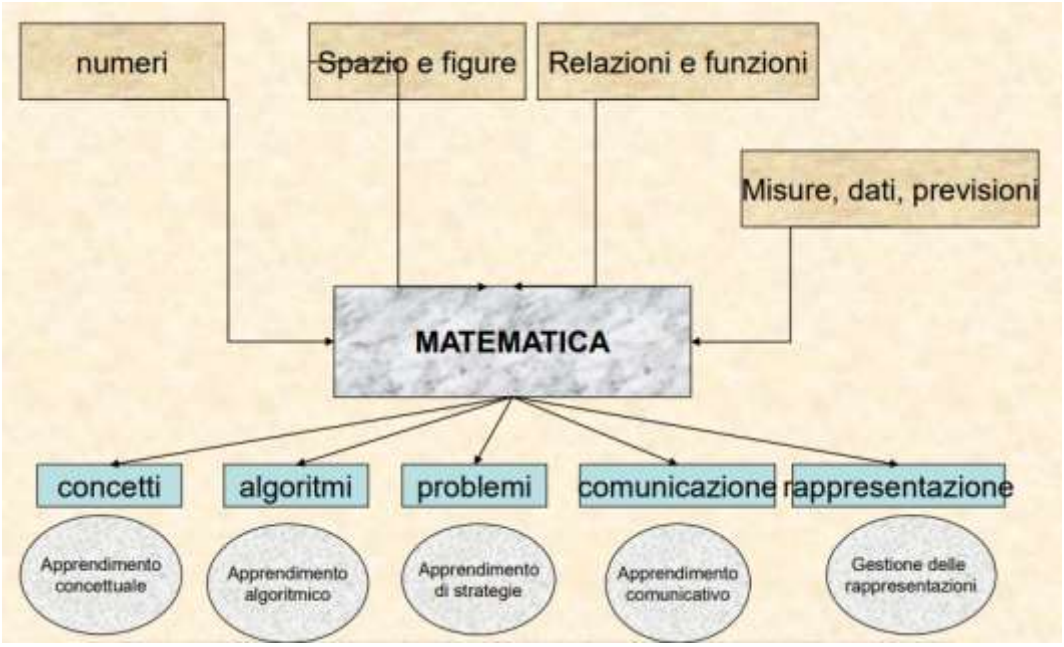


Fig. 3.5: L'apprendimento della matematica, Fandiño-Pinilla, 2008, p. 81.

L'apprendimento della matematica, come mostra la fig. 3.5, coinvolge dunque varie componenti e si palesa come apprendimento concettuale, algoritmico, strategico, di gestione delle trasformazioni semiotiche, e comunicativo.

Tuttavia, va ricordato anche il riconoscimento di tre ulteriori fattori che non erano stati precedentemente considerati come priorità: la necessità di un'istruzione di base di qualità per tutti i cittadini, l'ampliamento del valore sociale della formazione matematica e il ruolo della matematica nel consolidamento dei valori democratici.

Il primo di questi obbedisce all'ideale di offrire a tutta la popolazione un'istruzione equa e di qualità, che implica anche la ricerca dell'integrazione sociale e dell'equità nella e attraverso l'insegnamento della matematica. È necessario iniziare con l'identificare le conoscenze matematiche informali degli studenti in relazione alle attività pratiche nel loro ambiente e ammettere che l'apprendimento della matematica non è una questione legata solo ad aspetti cognitivi, ma coinvolge piuttosto fattori di natura affettiva e sociale, legati a particolari contesti di apprendimento. Queste considerazioni si estendono unitamente alla visione del carattere storico e contingente della matematica, ora considerata come un insieme di pratiche e realizzazioni concettuali e linguistiche legate a uno specifico contesto culturale e storico e che sono in continua trasformazione e ricostruzione come altre

pratiche e saperi. Il secondo fattore incorpora nuovi scopi sociali ai fini della formazione matematica, che sono argomentati con le seguenti ragioni. Il primo allude alla natura utilitaristica allargata della conoscenza matematica, mentre il mondo sociale e lavorativo altamente tecnologico del XXI secolo richiede sempre più strumenti forniti dalla matematica – senza dimenticare o sottovalutare i contributi di altre discipline come le scienze naturali e sociali – e da nuove tecnologie, per ottenere con esse prestazioni efficienti e creative in molti compiti che prima non richiedevano altro che aritmetica elementare. Il secondo motivo si riferisce alle conoscenze matematiche essenziali e necessarie in ogni cittadino per svolgere attivamente e criticamente la propria vita sociale e politica e per interpretare le informazioni necessarie nel processo decisionale. Il terzo fattore è legato al secondo motivo sopra menzionato, ma va oltre, poiché cerca di contribuire dall'insegnamento della matematica alla formazione ai valori democratici. Ciò implica riconoscere che esistono diversi tipi di pensiero logico e matematico che vengono utilizzati per prendere decisioni informate, per fornire giustificazioni ragionevoli o confutare quelle apparenti e fallaci, e per esercitare la cittadinanza critica, cioè per partecipare attivamente sviluppando azioni che collettivamente possono trasformare la società. Questo fattore aggiunge una nuova funzione politica alle altre funzioni della formazione matematica: la preoccupazione per la formazione ai valori democratici e per l'esercizio della cittadinanza critica. Pertanto, è necessario che nei processi di insegnamento della matematica la classe sia assunta come una comunità di apprendimento in cui insegnanti e studenti interagiscono per costruire e convalidare la conoscenza, per esercitare l'iniziativa e la critica e per applicare tale conoscenza in varie situazioni e contesti. I tre fattori sopra descritti richiedono riorganizzazioni, ridefinizioni e ristrutturazioni dei processi di insegnamento della matematica. In primo luogo, è necessaria una nuova visione della matematica come creazione umana, risultato dell'attività di specifici gruppi culturali (situati in una determinata società e periodo storico) e, quindi, come disciplina in evoluzione, provvisoria, contingente e costantemente mutevole. Ciò implica incorporare nei processi formativi degli studenti una visione della matematica come attività umana culturalmente mediata che ha un impatto sulla vita sociale, culturale e politica dei cittadini. In secondo luogo, è anche necessario

incorporare obiettivi politici, sociali e culturali nell'insegnamento della matematica, il che implica innanzitutto prendere in considerazione lo stato attuale della società, le sue tendenze di cambiamento e il futuro auspicato verso cui è diretto. L'incorporazione di questi scopi nell'insegnamento della matematica ci costringe a riconoscere che fa parte del sistema di valori condivisi, che ha basi etiche e che è radicato in una pratica sociale. Infine, è necessario passare da una didattica orientata solo al raggiungimento di obiettivi specifici legati ai contenuti dell'area e alla conservazione di tali contenuti, ad una didattica orientata a supportare gli studenti nello sviluppo delle competenze matematiche, scientifiche, tecnologiche, linguistiche e civiche.

L'espressione "didattica della matematica" è apparsa con l'intento di distinguere tra ricerca didattica e ricerca pedagogica. La pedagogia è l'arte di educare mentre la didattica è l'arte di insegnare. Le diverse ricerche in didattica della matematica possono essere riassunte nel triangolo didattico, di cui si è precedentemente discusso: la trasposizione didattica, le misconcezioni, il contratto didattico, gli ostacoli all'apprendimento, l'uso dell'informatica. Fondamentale, in questo senso, è concettualizzare il legame della matematica con la realtà. La modellazione matematica nell'insegnamento della matematica si riferisce allo sviluppo di compiti in un ambiente scolastico in cui gli studenti sono coinvolti nella ricerca di soluzioni a problemi del mondo reale attraverso l'uso della conoscenza matematica. Sebbene molto generale, questa idea comune menziona un momento che può essere di particolare interesse per l'insegnamento della matematica: il processo di inserimento o utilizzo di elementi matematici (tecniche, concetti, procedure, teoremi, ecc.) in un problema del mondo reale che, a in primo luogo, non includeva tali elementi. Questo processo è noto come matematizzazione (Blum et al., 2007).

Durante lo sviluppo di progetti di modellizzazione, agli studenti viene chiesto di condurre indagini aventi come punto di partenza un problema del mondo reale. Durante questo processo, gli studenti creano ipotesi e usano la matematica per risolvere il problema posto, eseguendo la matematizzazione. Durante la matematizzazione, "*gli oggetti, i dati, le relazioni, le condizioni e le ipotesi rilevanti dal dominio extramatematico vengono quindi tradotti in matematica, risultando in un modello matematico attraverso il quale affrontare il problema identificato*" (Ivi,

p.20). Allo stesso modo, la matematizzazione implica una traduzione dalla situazione reale al dominio matematico e che "il modello matematico fatto della situazione, le domande matematiche poste e gli artefatti matematici (ad esempio, grafici e tabelle) utilizzati per risolvere il modello matematico" costituiscono questo dominio matematico.

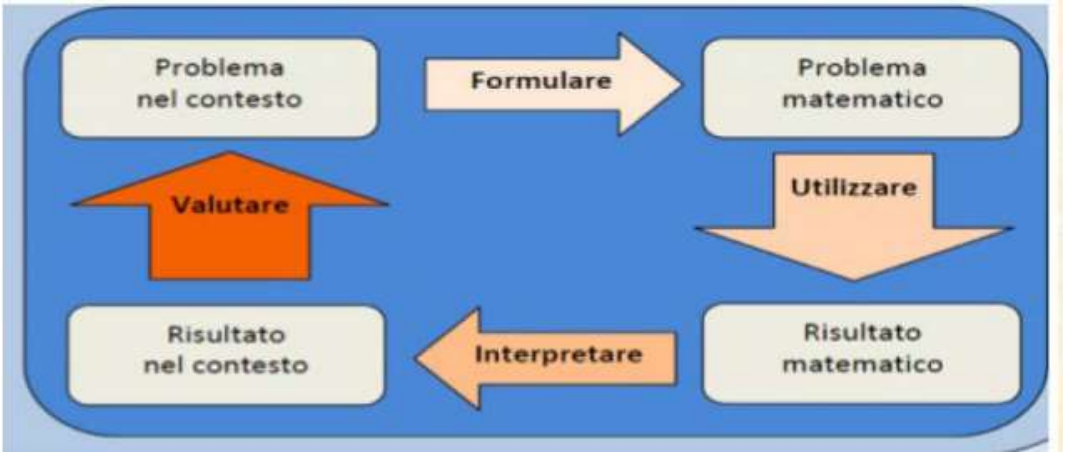


Fig. 3.6: La rappresentazione grafica del ciclo della modellizzazione matematica in PISA 2012 Quadro di Riferimento analitico, p. 26 - https://www.invalsi.it/invalsi/ri/pisa2012/documenti/Matematica.pdf)

La matematizzazione, come mostrano le fig. 3.6 (riportante la rappresentazione grafica del ciclo della modellizzazione matematica riportata nel riquadro interno della fig. 3.7) e 3.7, non viene utilizzata solo quando si crea un modello o una rappresentazione matematica di un problema con un contesto di vita reale, ma anche quando si risolve il problema e lo si interpreta in un contesto di vita reale. I passaggi della matematizzazione proposti sono (1) considerare il problema del mondo reale, (2) organizzare in base a contesti matematici, (3) ridurre gli aspetti più importanti, (4) utilizzare abilità matematiche e risolvere problemi e (5) considerare la soluzione nei termini della situazione reale. Altre fasi della matematizzazione sono (1) formulare, (2) impiegare, (3) interpretare e (4) valutare. Questi passaggi di matematizzazione vengono utilizzati per

(1) *formulare* un problema del contesto del mondo reale in un problema matematico ovvero rappresentare, identificare variabili e avanzare ipotesi semplificative;

(2) *utilizzare* i fatti, i concetti, le procedure e il ragionamento matematico per ottenere una soluzione matematica del problema in modo matematico, ovvero eseguire calcoli, manipolare, analizzare, ricorrere a strumenti matematici;

3) *interpretare* la soluzione matematica rispetto al contesto del mondo reale ed al problema iniziale, ovvero valutare soluzioni o argomentazioni matematiche, determinare se i risultati sono ragionevoli e sensati;

(4) *valutare* la soluzione rispetto al contesto del mondo reale ed al problema reale (Ivi, pp. 25-26).

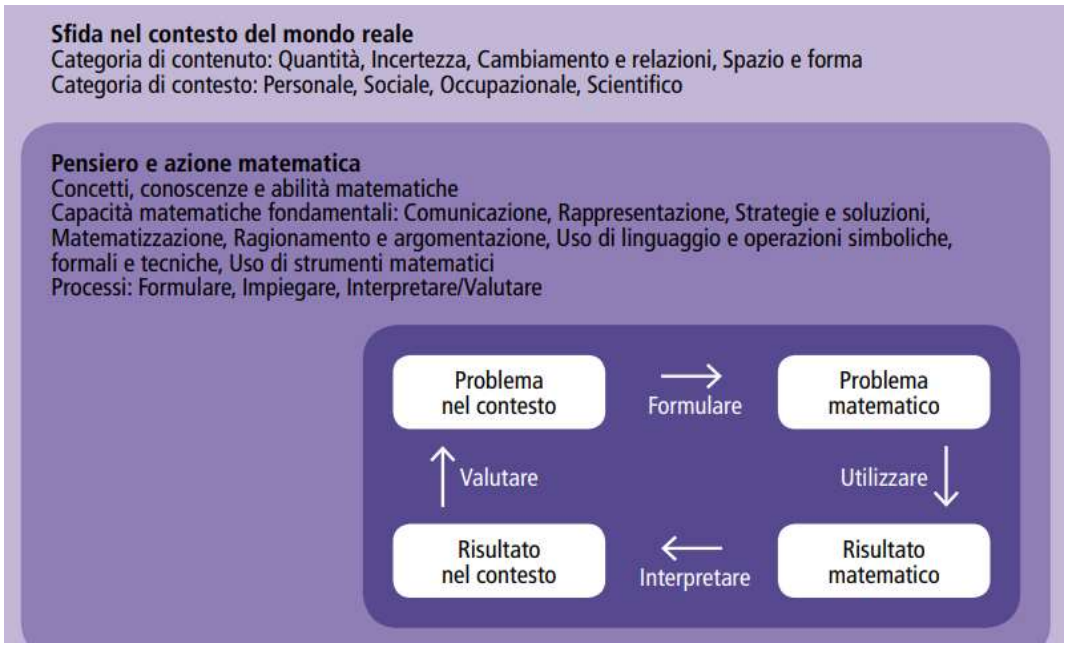


Fig. 3.7: L'applicazione pratica del modello di literacy matematica, in PISA 2012 Quadro di Riferimento analitico, p. 26 - https://www.invalsi.it/invalsi/ri/pisa2012/documenti/Matematica.pdf)

> In una situazione d'insegnamento, preparata e realizzata da un insegnante, l'allievo ha generalmente come compito di risolvere il problema (matematico) che gli è presentato, ma l'accesso a questo compito si fa attraverso un'interpretazione delle domande poste, delle risposte fornite, degli obblighi imposti che sono costanti nel modo di insegnare del maestro. Queste abitudini (specifiche) del maestro attese dall'allievo ed i comportamenti dell'allievo attesi dal docente costituiscono il contratto didattico (Brousseau, 1980, p.180 – ns. traduzione).

Osservando la fig. 3.8, si evince inoltre che il sapere personale viene dunque istituzionalizzato e legittimato (contratto pedagogico), successivamente accettato,

discusso e condiviso (contratto sociale), fino a divenire sapere istituzionale. Di seguito un esempio:

> *acquisizione di un sapere personale*: «ho scoperto che 3+5=5+3»
> *istituzionalizzazione*: «puoi usarlo»;
> *nominalizzazione*: si chiama proprietà commutativa e fa parte dei saperi che contano»
> costruzione di un sapere istituzionalizzato (D'Amore, 2001, p. 108).

Il concetto di modellizzazione del sapere, di cui si accennava in precedenza, prevede per l'allievo, lo scopo finale di apprendere un certo sapere e per l'insegnante la costruzione di certe condizioni, ben note e predisposte ad hoc. In altre parole, l'arte dell'insegnante sta nell'abilità di organizzare una relazione tra allievo e milieu, comprendente strumenti ed oggetti materiali.

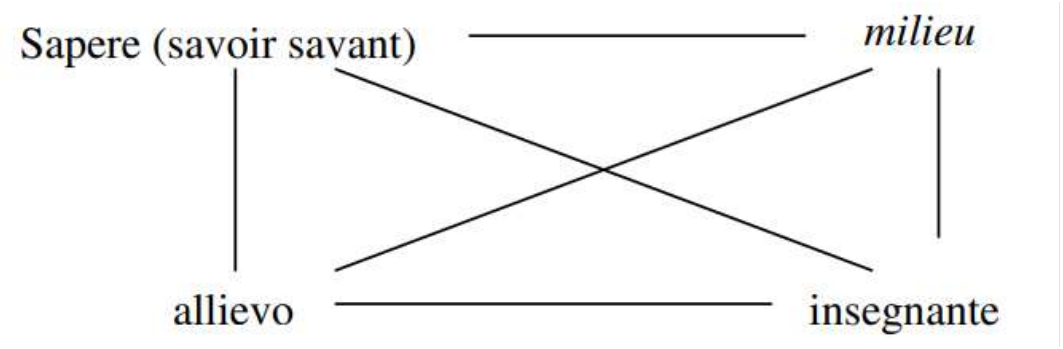


Fig. 3.8: Il triangolo dell'apprendimento, D'Amore, Fandiño Pinilla, 2002, p. 72

La prima ed immediata interazione con il milieu da parte dello studente è sempre complessa; progressivamente, poi, egli vi si adatta e si apre all'apprendimento, che viene sapientemente "provocato" e favorito dall'insegnante che crea, quindi, situazioni favorevoli affinchè ciò accada.

> L'allievo sa che il problema è stato scelto [dall'insegnante] per fargli acquisire una nuova conoscenza, ma deve sapere anche che questa conoscenza è interamente giustificata dalla logica interna della situazione e che può costruire senza fare appello a delle ragioni didattiche. Non solo egli può, ma anzi deve perché egli non avrà veramente acquisito questa conoscenza finché non sarà capace di metterla in opera da solo nelle situazioni che incontrerà al di fuori di ogni contesto di insegnamento ed in assenza di ogni indicazione intenzionale (Brousseau, 1986, p.52) - ns. traduzione).

Ovvero, il rapporto insegnante-allievo si arricchisce di una nuova dimensione che coinvolge l'allievo e la situazione ovvero l'allievo non risponde più alle richieste dell'insegnante ma a quelle del milieu, ovvero della situazione cognitiva e del contesto didattico nel quale si trova.

3.4 Didattica e valutazione

Quando si parla di didattica della matematica, risulta quanto mai necessario porre in evidenza il tema della valutazione. Valutare non significa dare giudizi o classificare quanto piuttosto ricercare, ottenere, organizzare e restituire informazioni. Si valuta per l'apprendimento (Bolondi, Ferretti, & Giberti, 2018). In tal senso, prima ancora degli strumenti, delle scelte tecniche, degli obiettivi e tanto altro ancora, appare necessario definire il "senso" della valutazione al fine di renderla più incisiva e affidabile e sgomberare il campo dall'idea che essa coincida con controllo, sanzione, giudizio e quindi con un significato negativo, quasi minaccioso, certamente non amichevole. Essa invece è da considerarsi come elemento essenziale che permette di migliorare l'insieme delle azioni di tutti i soggetti e fattori implicati nella relazione educativa svolgendo una funzione di regolazione dei processi, introducendo momenti di riflessività, stimolando il miglioramento. La valutazione ha una finalità essenzialmente educativa e formativa. Essa costituisce la tensione fondamentale a migliorare il sistema educativo e formativo in genere e nelle sue componenti particolari, perché vengano superati modelli obsoleti e siano realizzati nuovi modelli più articolati e maggiormente adeguati alla realtà: formazione non più come informazione ma come trasformazione. Per cui alla valutazione spetta il compito così delicato di collaudare l'impianto educativo e stimare, interpretandoli correttamente, i cambiamenti registrati nei singoli e nell'ambiente formativo (Castoldi, 1998).
Pertanto, la valutazione, per rispondere efficacemente alle sue funzioni, deve articolarsi in tre momenti fondamentali (Palumbo, 2001):

- La *valutazione iniziale*, si colloca nella prima fase dell'atto formativo ed ha una funzione di natura diagnostica circa i livelli cognitivi di partenza e le caratteristiche affettive d'ingresso. Essa rappresenta un punto di avvio irrinunciabile per la programmazione.

- La *valutazione in itinere o formativa* si colloca nel corso degli interventi didattici con lo scopo di fornire le informazioni necessarie per la regolazione dell'azione didattica.
- La *valutazione finale* è situata al termine di un'azione formativa o didattica. La sua funzione è sommativa, e consiste nel redigere un bilancio complessivo dell'apprendimento, sia al livello del singolo alunno sia a livello dell'intero gruppo.

Le quattro funzioni della valutazione

VALUTAZIONE FORMATIVA ←

Ha lo scopo di fornire una informazione continua e analitica circa il modo in cui ciascun allievo procede nell'itinerario di apprendimento. La valutazione formativa si colloca all'interno delle attività didattiche e concorre a determinare lo sviluppo successivo.

PROGRAMMAZIONE DIDATTICA

Costituisce un giudizio preventivo circa l'idoneità di procedure e risorse umane e materiali a consentire il raggiungimento dei traguardi della formazione. Tale giudizio è tanto meglio fondato quanto maggiori sono i dati a disposizione.

↓ ↓

VALUTAZIONE SOMMATIVA →

Risponde all'esigenza di apprezzare la capacità degli allievi di utilizzare in modo aggregato le abilità e le conoscenze che hanno acquisito durante una parte significativa del loro itinerario di apprendimento. Ha carattere sommativo anche la valutazione che si esprime al termine dell'anno scolastico, o dei periodi nei quali esso è suddiviso.

VALUTAZIONE DELLA QUALITÀ DELL'ISTRUZIONE

Rappresenta il compito di valutazione più complesso, perché il giudizio deve tener conto non solo del livello degli apprendimenti conseguiti dagli allievi, ma di quanto è stato realizzato anche sotto il profilo organizzativo all'interno della scuola. Occorre anche considerare se le risorse disponibili sono state utilizzate in modo opportuno.

Fig. 3.9: Le funzioni della valutazione, Palumbo, 2001, p. 52

Il ruolo della valutazione, come si evince dalla fig. 3.9, è quello di assicurare il costante controllo del sistema, e di consentire ad esso di autoregolarsi. Oltre alla distinzione tra una funzione formativa e una sommativa, si tratta di introdurre il

principio di feedback nella valutazione, attraverso il quale le informazioni relative a un processo in corso ne consentono l'immediata ristrutturazione ai fini del raggiungimento degli obiettivi del processo stesso (Vertecchi, 2003).

In definitiva, la valutazione dovrebbe premettere un monitoraggio e una regolazione costante dei percorsi didattici intrapresi, in vista del raggiungimento degli obiettivi curricolari, predisponendo dispositivi e tecniche di formative assessment anche in ambito matematico (Vannini, 2009). Tuttavia, il contesto storico influenza anche il settore scolastico che non può dunque prescindere da sistemi valutativi impostati su prove standardizzate che, va evidenziato, sono considerate in un'ottica formativa laddove coinvolgono le seguenti dimensioni: apprendimento concettuale; apprendimento algoritmico; apprendimento di strategie; apprendimento comunicativo; apprendimento e gestione delle trasformazioni semiotiche (Fandiño Pinilla, 2008).

Rispetto al processo di matematizzazione ed all'intervento del contratto didattico, tuttavia, alcuni risultati ottenuti dalle prove standardizzate evidenziano una mancanza significativa ancora assai generalizzata nelle risoluzioni da parte degli studenti legata soprattutto ai momenti di interpretazione e validazione. In tal senso:

> Lo studente legge il testo, decide l'operazione da effettuare ed i numeri con i quali deve operare; a quel punto scatta, appunto, la clausola di delega formale: non tocca più allo studente ragionare e controllare. Sia che faccia i calcoli a mano, tanto più se fa uso della calcolatrice, si instaura quella clausola che [...] disimpegna le facoltà razionali, critiche, di controllo: l'impegno dello studente è finito ed ora tocca all'algoritmo o meglio ancora alla macchina, lavorare per lui. Il compito successivo dello studente sarà quello di trascrivere il risultato, qualsiasi cosa sia e non importa che cosa esso significhi nel contesto problematico (D'Amore, 2002, p.75).

I processi di insegnamento e apprendimento riguardanti la matematica sono una componente fondamentale delle attività scolastiche e sono propedeutici a molte delle competenze significative nella vita e necessarie per la formazione della cittadinanza. La matematica apre la strada a diversi modi di pensare e ad applicazioni che influenzano la vita quotidiana, consentendo l'interpretazione critica e la valutazione dell'enorme quantità di informazioni prodotte nella moderna società dell'apprendimento. Inoltre, determina anche la pratica della cittadinanza attraverso processi decisionali logici, ragionati e motivati su questioni sociali. Senza un'adeguata costruzione di competenze in matematica (pensiero,

ragionamento logico, ecc.) diventa virtualmente impossibile accedere pienamente al mondo contemporaneo fatto di informazione, comunicazione e tecnologia. Ciò influisce sulle opportunità per tutti di essere coinvolti nella vita sociale ed economica. Appare importante progettare modalità innovative per investire soprattutto nella formazione degli insegnanti di matematica, in particolare attraverso percorsi formativi che mettano gli insegnanti in situazioni di progettazione collettiva e li portino a costruire piani, strategie e metodologie per insegnare efficacemente la matematica. Va da sé che ciò non significa solo indagare sulla materia, ma anche sulle strategie di apprendimento pedagogico-didattico, in particolare nell'ambito della valutazione, sottolineando il valore della valutazione formativa e delle strategie didattiche individualizzate, pensate per rispondere in modo specifico a ritmo e stili di apprendimento degli studenti. Dagli anni '90 c'è stata una crescente consapevolezza della necessità di cambiamenti significativi nelle pratiche di valutazione dell'apprendimento in matematica e probabilmente ciò è correlato al fatto che sempre più la matematica è stata identificata come una competenza chiave nell'ambito delle abilità e capacità della propria vita personale e sociale. Per quanto riguarda l'apprendimento della matematica, di solito gli insegnanti valutano le conoscenze, le abilità e le skill degli studenti. Nella pratica scolastica, la valutazione in matematica è spesso divisa e organizzata sulla base del contenuto dell'insegnamento, sebbene sia una nozione sempre più condivisa che per valutare adeguatamente le componenti trasversali dell'apprendimento sia necessario coinvolgere più dimensioni. Soprattutto negli ultimi tempi vi è un crescente interesse su cosa significhi competenza in matematica e su come questa possa essere valutata (Ferretti et al., 2018).

3.5 L’insegnamento della matematica nella scuola secondaria di secondo grado

L'insegnamento della matematica nell'istruzione superiore ha abbracciato da tempo i metodi tradizionali: modi di insegnare la matematica poco interattivi, in cui lo studente è il destinatario della consegna da parte dell'insegnante, ma solo in minima parte un partecipante. Gli approcci tradizionali possono essere visti come dominati dalla teoria e non per soddisfare i bisogni della maggior parte degli studenti.

Pertanto, sembra quanto mai necessario riformare l'insegnamento della matematica, spesso radicato nella teoria costruttivista, considerando approcci pedagogici più innovativi al fine di promuovere l'apprendimento concettuale degli studenti (Abaté, & Cantone, 2005).

Nuovi studi di pedagogia suggeriscono che gli approcci all'insegnamento dovrebbero concentrarsi su concetti e contestualizzazione invece di istruire su fatti isolati. La pedagogia costruttivista sociale enfatizza l'interazione sociale degli studenti con i coetanei e l'insegnante e suggerisce di tenere in considerazione gli stili di apprendimento degli studenti. Alcuni dei pilastri principali sono: l'apprendimento è un processo centrato sullo studente, l'autonomia degli studenti dovrebbe essere più che incoraggiata; l'apprendimento dovrebbe essere contestualizzato e associato ad ambienti ed esempi autentici del mondo reale; l'interazione sociale e il discorso costituiscono una parte importante dell'apprendimento; gli elementi insegnati dovrebbero essere resi rilevanti per lo studente e collegati con le conoscenze precedentemente acquisite; è importante favorire meccanismi di valutazione formativa continua, autostima e motivazione; gli insegnanti dovrebbero considerare modalità differenti di insegnamento (Ivi, p.160).

Il ricorso a metodi incentrati sullo studente nell'insegnamento della matematica aumenta il loro interesse per la materia e il loro tasso di successo, nonchè l'apprezzamento per il ruolo della matematica nella vita motivandoli a realizzarne l'applicabilità. I metodi tradizionali di insegnamento passivo in aula lasciano poco tempo, se non nullo, per discussioni e dialoghi tra gli studenti stessi e/o con il docente. In tal senso, vanno incoraggiati docenti all'ascolto attivo, stimolando il dibattito in classe, ponendo domande stimolanti e dando vita ad una comunicazione bidirezionale nonché ad una comprensione concettuale dei problemi matematici tra gli studenti. Inoltre, i fattori affettivi giocano un ruolo importante nel successo o nel fallimento dell'apprendimento da parte degli studenti, tra cui le convinzioni di autoefficacia, motivazione, impegno e atteggiamenti positivi nei confronti della matematica. Abatè e Cantone suggeriscono che una riforma dell'insegnamento della matematica dovrebbe, appunto, lavorare per aumentare la motivazione degli studenti verso la materia (Ibidem).

La motivazione all'apprendimento della matematica è fortemente legata all'utilizzo di problemi derivanti dal mondo reale. In questo senso, l'educazione finanziaria, o financial literacy, non solo trasmette concetti, ma promuove ed incoraggia anche l'abilità di prendere decisioni consapevoli in ambito finanziario ed economico, in modo che i giovani si sentano in grado di partecipare attivamente alla vita economica (Lusardi, 2015).

Ignorare i reali problemi economici e finanziari che affliggono la società odierna rende i ragazzi cittadini poco consapevoli sia nel prendere decisioni che nel valutare i possibili rischi. Pertanto, una didattica che valuta le competenze ed è incentrata sullo studente e sulla sua capacità di far fronte a condizioni reali dovrebbe riuscire a coinvolgere anche fattori non cognitivi e dipendenti dal contesto socio economico e familiare. Risulta allora importante inserire programmi di educazione finanziaria già durante gli anni di scuola superiore, molto prima che gli individui si trovino ad essere coinvolti nell'assunzione di responsabilità di carattere finanziario, come la sottoscrizione di prestiti, mutui e contratti di vario tipo, senza attendere che sia l'università a offrire questa opportunità (Lusardi, Mitchell & Curto, 2010). La consapevolezza di certi argomenti e problematiche deve sorgere molto prima. In tal senso, sono stati predisposti alcuni percorsi che consentono ai docenti di matematica nella scuola secondaria di secondo grado di introdurre argomenti di matematica finanziaria utilizzando modalità didattiche innovative, come la flipped classroom o altri approcci ludici ed informali. Ad esempio, il politecnico di Milano ha avviato un progetto per realizzare "il labirinto delle finanze", un gioco sui temi dell'educazione finanziaria da proporre a tutte le classi delle scuole secondarie di secondo grado di qualsiasi indirizzo scolastico[5].

La gamification e il game based learning sono simili in quanto entrambe le strategie promuovono il coinvolgimento e la motivazione sostenuta nell'apprendimento. Tuttavia, possono anche essere utilmente distinti. Il game based learning è un approccio innovativo all'apprendimento derivato dall'uso di giochi che di norma richiedono l'utilizzo di un computer e che possiedono un valore educativo o diversi tipi di applicazioni software che utilizzano i giochi come supporto

[5] Si veda: https://www.imparalafinanza.it/
https://www.imparalafinanza.it/edufin-labirinto-delle-finanze/

all'apprendimento, all'insegnamento ed alla valutazione degli studenti. Alcuni dei vantaggi legati al game based learning hanno a che fare con la motivazione, la capacità dei giochi per computer di fornire ambienti privi di rischi, di rafforzare l'autostima, di essere versatili e idonei per l'apprendimento. A livello individuale queste attività ludiche sono sfidanti ovvero un livello appropriato di difficoltà e sfida, obiettivi multipli per vincere, feedback costante e sufficiente casualità è fondamentale. Inoltre, esse favoriscono ed accrescono *fantasia* ovvero un adeguato livello di immersione nel gioco assumendo un ruolo particolare e affrontando le relative responsabilità; *curiosità*, per fornire stimoli sensoriali per garantire una partecipazione prolungata, e *controllo*, ovvero la capacità di selezionare le varie opzioni possibili e di osservarne le conseguenze. A livello interpersonale il game based learning stimola la cooperazione, perchè aiuta gli altri a raggiungere obiettivi comuni, la concorrenza, in quanto confronta le prestazioni dei partecipanti con le prestazioni di altri giocatori, ed il riconoscimento, ovvero un senso di soddisfazione quando vengono riconosciuti i risultati. Il game based learning si rifà a teorie della motivazione, del costruttivismo, dell'apprendimento situato, dello sviluppo cognitivo, dell'apprendimento basato su problemi reali e learning by doing. Il gioco asseconda lo sviluppo di abilità e conoscenze fondamentali, compreso il sostegno all'alfabetizzazione, alla matematica e all'apprendimento delle scienze. Creando mondi virtuali, il game based learning integra "…non solo sapere e fare. I giochi riuniscono modi di conoscere, modi di fare, modi di essere e modi di prendersi cura: le comprensioni situate, le pratiche sociali efficaci, le identità potenti e i valori condivisi che rendono qualcuno un esperto" (Ligabue, 2020).

Strettamente collegato al concetto di game based learning è quello di gamification, considerato una parte fondamentale del processo di apprendimento in quanto permette di adattare piattaforme e utilizzare strumenti in qualsiasi area della conoscenza. Riuscendo così ad incorporare elementi del gioco in un contesto di apprendimento e facendo in modo che migliori la motivazione ad apprendere così come i risultati del processo formativo. La gamification descrive dunque l'incentivazione del coinvolgimento delle persone in contesti e attività non di gioco utilizzando però meccanismi ludici. Ogni volta che funzionalità o aspetti del design del gioco vengono introdotti in contesti non di gioco, è in corso la ludicizzazione,

ovvero la gamification. In altre parole, le attività del mondo reale sono rese simili a un gioco per motivare le persone a raggiungere i propri obiettivi. La gamification, inoltre, sfrutta le tendenze naturali delle persone per la competizione, il successo, la collaborazione e la condivisione. Gli strumenti impiegati nella progettazione del gioco, come premiare gli utenti per i risultati ottenuti, "salire di livello" e guadagnare badge, vengono trasferiti nel mondo reale per aiutare a motivare le persone a raggiungere i propri obiettivi o aumentare le prestazioni (Nesti, 2017).

Il concetto di gamification è stato applicato nell'apprendimento di matematica in una classe prima di un Liceo scientifico. La dimensione del problem solving, in tal senso, risulta molto rilevante quando ci si interroga sul come affrontare le operazioni ed i problemi di matematica più efficacemente trovando la soluzione attraverso meccanismi di gioco motivanti e sfidanti che lavorano su un sistema di ricompense. Si pensi anche all'insegnamento della matematica "ricreativa" per mettersi alla prova e sviluppare le capacità logico-spaziali. La matematica viene troppo spesso definita una materia seria, mnemonica, spesso astrusa e lontana dalla realtà e questo stereotipo è necessario superarlo attraverso proprio un'esperienza di gioco. Ad esempio, i puzzle interattivi (ad esempio Tangram, le Torri di Hanoi) consentono di mettersi alla prova e sviluppare le capacità logico – spaziali così come il Sudoku favorisce una matematica ricreativa, mentre i Numbles servono a sviluppare la velocità di calcolo rapido senza annoiarsi. Dal punto di vista didattico, l'importante è che l'insegnante non presenti immagini troppo forti, convincenti o persistenti del concetto matematico che si vuole insegnare rischiando di trasformare il gioco in modello intuitivo. L'utilizzo dei giochi stimola l'emisfero destro del cervello, quello immaginativo, intuitivo, creativo senza il quale l'idea non può focalizzarsi e dunque la matematica rischia di ridursi in un mero calcolo strano e ripetitivo (Giannoli, 2012).

Ritornando al progetto presentato ed attuato dal Politecnico di Milano, i partecipanti sono stati:

– una classe seconda di un liceo scientifico (20 studenti, divisi in 7 squadre);

– due classi seconde di un istituto professionale (31 studenti, divisi in 8 squadre);

– una classe seconda di un liceo scientifico (22 studenti, divisi in 8 squadre);

– una classe terza e una classe quarta di un istituto tecnico commerciale (40 studenti, divisi in 10 squadre).

Prima di iniziare, sono stati affrontati diversi temi di matematica finanziaria in modo accessibile anche per un pubblico di non esperti. La prima settimana è stata dedicata a concetti come il conto corrente, le leggi di capitalizzazione, i tassi di interesse di azioni e obbligazioni, i costi di prestiti, finanziamenti e mutui. La seconda settimana ha riguardato in modo più specifico i rischi collegati agli investimenti, affrontando temi come la diversificazione, la psicologia delle scelte di investimento, le assicurazioni e le misure di rischio. I temi affrontati nell'ultima settimana di corso hanno invece riguardato il risparmio, in particolare i prodotti offerti da banche e istituzioni, la profilatura del rischio, derivati, fondi comuni di investimento, fondi pensione. Questa formazione di base, accessibile a tutti i docenti, ha permesso la realizzazione del gioco in classe. All'inizio dell'attività ogni squadra ha ricevuto una sorta di mappa della propria scuola con alcuni luoghi indicati, ovvero aula, banca, casa, negozio. Per rendere più complesso il gioco, oltre alle quattro tappe che realmente i giocatori hanno visitato durante la caccia al tesoro, sono state inserite altre "tappe finte" con la funzione di distrattori come agenzia, edicola, parco, ristorante. Una volta raggiunto un luogo specifico, ogni squadra riceveva un documento con alcune spiegazioni contenenti le informazioni necessarie per rispondere alle domande della tappa. Le spiegazioni erano fornite in diverse modalità: paragrafi di testi, grafici, tabelle, brevi video da guardare con il proprio smartphone. In tal senso, il QR Code presente in ogni scheda consentiva l'accesso ad un formulario online con domande relative alla tappa alle quali le squadre dovevano rispondere. Il regolamento prevedeva una sort di sbarramento finchè non si fosse realizzato il punteggio massimo, così da portare gli studenti a rivedere i propri errori, a ritornare sui vari concetti esposti fino ad individuare le risposte corrette. Questo sistema di correzione automatica è stato ideato al fine di rendere gli studenti più autonomi e indipendenti nel processo di autocorrezione. L'elemento puramente ludico e divertente era contenuto nell'indizio di natura non finanziaria che le squadre ricevevano per poter raggiungere la tappa successiva, ovvero un indovinello, un anagramma o un messaggio cifrato per coinvolgere maggiormente gli studenti. Di seguito argomenti e contenuti del gioco (fig. 3.10):

Nome della tappa	Argomento	Contenuti
#1 – Aula	Ripasso	Scrivere rappresentazioni equivalenti dei numeri in forma percentuale, frazionaria o decimale. Leggere e interpretare grafici.
#2A – Banca 1	Conto corrente	Calcolare il costo del conto corrente rispetto ad alcune offerte e alcune tipologie di utilizzo.
#2B – Banca 2	Leggi di capitalizzazione	Utilizzare le leggi di capitalizzazione semplice e composta per calcolare il montante con orizzonti temporali di uno o più anni.
#3 – Casa	Investimenti	Valutare la rischiosità di un investimento e calcolare il rendimento.
#4 – Negozio	Prestiti	Scegliere le condizioni di prestito più convenienti e confrontare prestiti con tassi di interesse su orizzonti temporali minori dell'anno.

Fig. 3.10: Il labirinto delle finanze, Politecnico di Milano, https://www.pok.polimi.it/

La valutazione finale espressa sia da docenti che studenti è stata molto positiva soprattutto per la possibilità di accedere a contenuti piuttosto inediti per un programma di matematica previsto nella scuola secondaria di secondo grado, per la metodologia didattica innovativa che ha incuriosito e motivato non solo al gioco ma anche all'apprendimento.

Per portare, non solo gli studenti, ma anche i docenti, ad una nozione più esatta di cosa sia la Matematica e del ruolo che realmente essa gioca nella vita moderna, sarà necessario fare di più e creare dei veri e propri laboratori di matematica (Borel, 2002).

Ed è proprio in questa direzione in cui vengono progettati e realizzati i laboratori per studenti da ForMATH Project al fine di divulgare e diffondere il sapere scientifico. Fra le proposte laboratoriali vi sono[6]:

I ragazzi di … ti invitano a giocare

Reset Geometria!

Il mondo piatto – matematica e geometria del pianeta terra

CI VEDO DOPPIO – un percorso sulle illusioni ottiche

[6] Si veda: https://www.formath.it/educazione/giochi-di-strategia/

MathUP – percorso di eccellenza

Matematica in natura

SFERE BOLLE PALLE GLOBI un affascinante viaggio tra arte e scienza

Soprattutto i giochi di strategia aiutano a esplicitare in una situazione le cose sottintese o evidenti; decomporre le difficoltà di un problema in passi semplici, e poi ricomporre i risultati parziali ottenuti; concatenare le affermazioni; elencare e classificare i casi possibili; dare correttamente e utilizzare definizioni; verificare le proprie ipotesi con esempi e controesempi; generalizzare i propri risultati; capire quali elementi di un problema servono per la sua soluzione; trasferire un risultato ottenuto in un contesto ad un'altra situazione; utilizzare le ipotesi per giustificare le proprie affermazioni. In altre parole, si lavora sulla capacità da parte dei ragazzi di analizzare una situazione, rispettare le regole del gioco, elaborare tattiche efficaci, pianificare strategie, esaminare razionalmente il comportamento proprio e altrui, potenziare il pensiero logico (deduzioni, ipotesi e verifiche, formulazione di controesempi, reversibilità del pensiero, uscita dall'egocentrismo cognitivo)[7].

Il rimedio alla disaffezione per la matematica non è fare meno matematica, ma fare matematica migliore.

Ad alcuni studenti di una classe terza secondaria di II grado è stato sottoposto un problema inerente al gioco del Lotto, dovendo calcolare quante cinquine possano essere estratte su una ruota tenendo in considerazione quanto appreso sulle formule della combinatoria. Attraverso le loro emozioni, i tre studenti percepiscono, comprendono, riflettono e agiscono, acquisendo un metro per 'sentire' la vicinanza, o la lontananza, alla soluzione (corretta) del problema (Hannula, 2001).

Un'altra attività laboratoriale è stata dedicata agli studenti dell'ultimo anno di un Liceo Scientifico. La metodologia prevista è stata quella del role playing simulato: gli studenti sono stati divisi in piccoli gruppi e hanno avuto il ruolo di feudatari nel Medioevo con il compito di interagire strategicamente e far prosperare le loro terre confrontandosi con le sfide, le difficoltà e le esigenze degli altri giocatori. Tra dilemmi e scelte da prendere, il gruppo si è impegnato per proporre possibili soluzioni giustificando le proprie scelte. Questo approccio incentrato sullo studente,

[7] Si veda: https://www.formath.it/wp-content/uploads/2014/02/4_pdfsam_Progetti-per-le-Scuole.pdf

in una dinamica di apprendimento basato sull'interazione strategica, ha favorito la partecipazione attiva stimolando peraltro l'intelligenza emotiva (Capone, Rogora, &Tortoriello, 2017).

È stato condotto uno studio in alcune classi di un Liceo Scientifico all'interno del quale sono state progettate e implementate due schede di lavoro focalizzate su alcuni esempi di dimostrazioni senza parole di tipo algebrico e geometrico. L'obiettivo era quello di far ricostruire il processo dimostrativo sotteso e far riflettere gli studenti su un confronto fra tali dimostrazioni e altre tipologie di dimostrazioni, solitamente privilegiate. Oltre a ciò, si mirava ad evidenziare eventuali criticità e punti di forza di un'impostazione di questo tipo nel favorire lo sviluppo di competenze di riflessione, confronto e analisi critica. I quesiti presentati, una volta analizzate bene le schede contenenti la dimostrazione senza parole e quella visiva, miravano a (a) ricostruire la dimostrazione a partire dall'immagine; (b) confrontare, in modo critico, la dimostrazione senza parole proposta e un'altra dimostrazione, associabile a un approccio tradizionale; (c) riflettere sull'efficacia e sulla validità di questo tipo di approccio alla dimostrazione (Mazza et al., 2020).

Alcuni studenti del biennio di due Licei Scientifici ed un Liceo Classico hanno partecipato ad un progetto inerente agli elementi del linguaggio Python, attraverso l'utilizzo di Google Colaboratory Notebook o dell'analogo Notebook Azure, per la creazione di modelli matematici per l'epidemiologia da Covid-19, verificando altresì l'andamento dei dati reali e a fare possibili previsioni. Oltre a ciò, il progetto ha previsto l'utilizzo di Matplotlib per file CSV, una library per rappresentare dati reali ed il problema teorico del Fit di dati e il suo utilizzo per la conferma di modelli teorici. Il percorso ha consentito di acquisire le competenze necessarie a importare dati in formato CSV, rappresentarli con grafici appropriati e costruire semplici modelli di previsione (lineare, polinomiale, esponenziale, logistico) sui dati relativi alla pandemia (Pallotta, Passaro & Sutrini, 2020).

Appare evidente l'importanza del principio di argomentare e del principio di cooperazione, anche in ambito matematico. In tal senso, quest'ultimo si basa su quattro massime:

1. dà un contributo appropriato sotto il profilo della quantità di informazioni (massima della quantità);
2. non dire cose che credi false o che non hai ragione per credere vere (massima della qualità);
3. dà un contributo pertinente ad ogni stadio della comunicazione (massima della relazione);
4. esprimiti in modo chiaro, breve, ordinato (massima del modo).

Ad oggi il contesto matematico si presenta invece scarsamente cooperativo (Ferrari, 2004) e fortemente limitante nei confronti della capacità argomentativa mostrata dagli studenti (Grice, 1993).

La motivazione, la curiosità, l'attitudine alla collaborazione sono gli aspetti comportamentali che integrano le conoscenze, valorizzano gli stili cognitivi individuali per la piena realizzazione della persona, facilitano la possibilità di conoscere le proprie attitudini e potenzialità anche in funzione orientativa (Tallini, 2016). Dal punto di vista didattico, il recupero dell'approccio che tiene conto dei fattori di motivazione e dell'ambiente di apprendimento è di fondamentale importanza nell'insegnamento. I fattori motivazionali includono non solo le situazioni più piacevoli e divertenti, ma anche quegli elementi relativi alla curiosità, al gioco, alle esperienze individuali e di gruppo che possono diventare fonte di discussione, di ipotesi di lavoro, di scoperta, di riflessione tra studenti e tra insegnante e i suoi studenti. Le condizioni dell'ambiente di apprendimento derivano principalmente da una pianificazione svolta dall'insegnante considerando, in una dimensione di un processo dialettico e in progress, il lavoro sia dello studente che dell'insegnante e della relazione didattica che è stabilito ogni volta. Il laboratorio nella scuola è stato definito da diversi autori in modi diversi. Alcuni di questi vedono il laboratorio come un luogo in cui le esercitazioni, condotte dagli insegnanti, includono esperimenti e altre attività che aiutano gli studenti ad acquisire competenze specifiche. Il laboratorio viene anche definito come luogo in cui si svolgono varie attività in un ambiente favorevole. L'esperienza di laboratorio, presuppone la partecipazione alla serie di attività sperimentali, osservative e dimostrative che offrono agli studenti l'opportunità di sviluppare la comprensione

di concetti pratici e teorici attraverso l'identificazione di soluzioni ai problemi. In un tale percorso di didattica laboratoriale la finalità principale è quella di incrementare specifiche capacità sperimentali che consentano al soggetto di auto-formarsi mettendo in pratica quanto appreso in precedenza. In tal senso, il luogo dell'apprendimento laboratoriale favorisce in maniera significativa le potenzialità degli individui (Zanniello, 2008). La didattica laboratoriale presuppone uno spazio protetto in cui le attività vengono svolte non in maniera frammentaria e casuale ma mirando al successo formativo e producendo innovazione. Il laboratorio è la sede "specializzata per l'attivazione di percorsi di conoscenza-ricerca-formazione di natura integrata e reticolare" (Pinto, 2005). L'apprendimento assume una importante funzione pedagogico-formativa, il cui focus è il contesto dotato di novità. Le differenze intersoggettive vengono valorizzate attraverso lo scambio comunicativo e il lavoro partecipativo in cui l'impegno del singolo viene canalizzato in relazione al raggiungimento del traguardo formativo dettato dal gruppo.

L'approccio della didattica laboratoriale prende la forma di un lavoro organizzato in progetti, dalla formulazione dell'idea progettuale alla definizione degli obiettivi da raggiungere; all'analisi delle risorse disponibili e di quelle da raccogliere; alla pianificazione delle fasi di lavoro e delle scadenze; all'organizzazione delle attività di ricerca, raccolta e infine elaborazione dei dati; alla valutazione finale di ciò che è stato ottenuto. La sperimentazione, essendo principalmente cognitiva perché lo studente organizza e riorganizza la sua conoscenza in un continuo "fare e saper fare", è supportata anche dal coinvolgimento emotivo, dal divertimento e dalla curiosità dell'individuo e del gruppo riguardo il processo di scoperta che porta al raggiungimento di un obiettivo condiviso (Pellerey, 2008).

Il concetto di didattica laboratoriale, allora, presume che l'individuo apprenda lavorando, osservando, collaborando, e non eseguendo un'attività dopo aver ascoltato una mera spiegazione teorica.

Gli obiettivi della Didattica laboratoriale, che si basano sul procedere per problemi e per ricerca, pongono l'attenzione sull'attività specifica svolta dal singolo studente ma in stretta collaborazione e cooperazione con il gruppo all'interno del quale agisce, ovvero all'interno di tuta una serie di equilibri tale per cui il fare insieme

per imparare è alla base della "co-costruzione" delle conoscenze. Oltre a ciò, specifiche procedure e protocolli d'azione, supportati da una determinata strumentazione, conducono all'elaborazione e realizzazione di un prodotto cognitivo o materiale che permette l'acquisizione di conoscenze e contenuti adattabili alle individuali conoscenze e competenze acquisite e relative al lavoro che gli studenti hanno svolto in team (Brown, 1995).

Risulta importante sottolineare, poi, che l'impiego di metodi di comparazione critica accresce e migliora la trasmissibilità dei contenuti su più livelli cognitivi (Ceruti, 1995).

Nella nuova didattica laboratoriale vi è un fattore, per così dire, di equilibrio didattico in cui tutti hanno bisogno di tutti. L'approccio collaborativo incoraggia un apprendimento situato attraverso la discussione di tutti i fattori che sono oggetto di studio, l'elaborazione di conoscenze e l'acquisizione di nuove competenze. Tutto ciò a dimostrazione che la teoria e i contenuti acquisiti e "imparati" non sono sufficienti a spiegare i fenomeni che ci circondano e a dimostrare, ovvero mettere in pratica, quanto appreso. La didattica laboratoriale è più che mai necessaria per garantire, e incoraggiare, il protagonismo attivo degli studenti (Pontecorvo, Aiello & Zucchermaglio, 1995).

Vi è anche la didattica per problemi reali che stimola maggiore motivazione e interesse partendo da situazioni reali e in parte conflittuali, tratte dalla vita personale e comunitaria dell'alunno. Comporta l'attivazione delle risorse dell'alunno e la curiosità verso il contesto circostante. Tale metodologia viene utilizzata in piccoli gruppi generalmente condotti da un tutor-facilitatore il quale propone problemi realistici ma incompleti su cui gli alunni devono discutere per potervi trovare una soluzione. Questo tipo di didattica guida la ricerca e l'indagine degli alunni facilitando un livello di comprensione più profondo (Janes, 2016). Si rende evidente lo stretto legame tra apprendimento e ricerca: come nella ricerca, infatti, anche nell'apprendimento/insegnamento tutto parte dalla domanda, dal quesito che dà avvio alla ricerca stessa. Il problema che si presenta attiva l'interesse dello studente coinvolto stimolandone competenze, abilità di problem solving, di pensiero critico e di creatività. L'analisi che ne segue è ampiamente supportata dalla curiosità dello studente che si impegna a ricercare indizi, dimostrare la sua ipotesi iniziale, arrivare

alla soluzione del problema. Lo studente prende dunque coscienza del problema indagato cercando la spiegazione a tutta una serie di eventi o fenomeni ad esso correlati che obbligano lo studente a ricercare una soluzione.

La didattica per problemi reali presuppone che lo studente:

- ✓ ricorra a conoscenze già acquisite per approcciare al problema
- ✓ individui o ipotizzi possibili soluzioni al problema
- ✓ dimostri apertura e flessibilità nell'approccio al problema e nell'identificazione di nuove soluzioni
- ✓ acquisisca nuove conoscenze consolidando quelle pregresse
- ✓ esplori con creatività e curiosità

Questo tipo di didattica agisce efficacemente anche sui comportamenti:

- ✓ abitua alla concentrazione e alla riflessione
- ✓ educa alla ricerca ed all'approfondimento
- ✓ motiva all'acquisizione di nuove conoscenze
- ✓ attinge a saperi differenti e incoraggia all'interdisciplinarietà
- ✓ motiva alla costruzione di modelli di riferimento
- ✓ stimola il teamwork ed il pensiero critico

La didattica per problemi reali rende significativi gli apprendimenti e conferisce un obiettivo importante allo studio ed alla ricerca. Essa dovrebbe realmente rappresentare una parte rilevante del curriculum di ogni studente in quanto presuppone che gli studenti possano assumersi parte della responsabilità del proprio apprendimento e possano intraprendere azioni personali per risolvere problemi, risolvere conflitti, discutere alternative e concentrarsi sul pensiero come elemento vitale del nell'acquisizione di nuove conoscenze e competenze. L'obiettivo non è giungere ad una soluzione definita ma all'arricchimento apprenditivo e al conseguimento di attributi desiderabili. Il ruolo dell'insegnante è quello di guidare, sostenere e monitorare l'apprendimento incoraggiando, e facilitando, un livello più approfondito di comprensione dei problemi e delle possibili soluzioni (Torp, Sage, 2002). Il docente, che diviene facilitatore, assurge a quattro funzioni importanti: tutor metacognitivo del gruppo, pianificatore del modulo didattico, valutatore, esperto di contenuti didattici. Inoltre adotta la "metodologia dei sette salti", ovvero

per stimolare la curiosità e la ricerca ad ogni "salto" il docente pone quesiti che mettono in grado lo studente di procedere nella ricerca e avanzare correttamente.

> L'apprendimento basato sui problemi è una metodologia didattica che si dice fornisca agli studenti le conoscenze adatte per risolvere problemi. Tutto l'apprendimento, in un curriculum basato sui problemi, comincia con un problema. Un problema di solito descrive alcuni fenomeni o eventi che possono essere osservati nella vita quotidiana, ma può anche consistere nella descrizione di un argomento (un problema, scritto da un gruppo di docenti, ha lo scopo di guidare gli studenti verso certi argomenti di studio teorico o pratico importante (Schmidt, 1983, p. 12 – ns. traduzione).

3.6 La tecnologia a supporto della didattica della matematica

L'uso della tecnologia per l'insegnamento e l'apprendimento della matematica può essere classificato in due dimensioni:

- l'uso di pacchetti software di analisi matematica specifici del dominio;
- l'uso generale delle tecnologie di apprendimento e degli strumenti online.

Importanti progressi negli strumenti online hanno permesso un miglioramento dell'esperienza degli studenti nell'apprendimento della matematica consentendo, peraltro, l'autonomia in tale processo. Software specifici forniscono supporto per l'insegnamento della matematica nell'istruzione superiore, come MyMathLab[8] e ALEKS[9]. MyMathLab consente agli insegnanti di progettare un modulo e-learning personalizzabile che contiene molte funzioni utili, come esercizi di assegnazione interattivi con soluzioni guidate, piano di studio personalizzato, sussidi multimediali inclusi video di lezioni e animazioni, assessment manager per la modifica di test e quiz e una rubrica che tiene traccia automaticamente dei risultati degli studenti. ALEKS è invece un sistema di valutazione e apprendimento online che utilizza algoritmi di intelligenza artificiale per la valutazione adattiva della conoscenza di un determinato corso da parte degli studenti.

Wiki e forum online sono stati utilizzati per facilitare il dibattito e la collaborazione tra gli studenti che apprendono la matematica. Si sostiene che gli strumenti del Web 2.0 (ad es. Wiki e siti Web di social networking) possano facilitare un apprendimento della matematica definito cyber-social-costruttivista. I sistemi di

[8] Si veda: www.mymathlab.com
[9] Si veda: www.aleks.com

voto in aula come TurningPoint sono anche stati utilizzati per facilitare il dibattito e la condivisione nelle lezioni di matematica.

La tecnologia continua a fare passi da gigante nel motivare gli studenti a impegnarsi sempre più nel processo di apprendimento matematico. L'integrazione e l'utilizzo della tecnologia nell'insegnamento della matematica può inoltre incoraggiare gli studenti a diventare partecipanti attivi in classe. Una tecnologia efficace in un'aula di matematica include l'utilizzo delle calcolatrici grafiche e interattive che offrono agli studenti un modo per esplorare contenuti matematici più complessi. L'uso di altri tipi di software fornisce agli studenti un ambiente di apprendimento strutturato che pone l'accento sull'organizzazione e la sintesi dei contenuti. L'integrazione di qualsiasi tecnologia nell'insegnamento della matematica ha il potenziale di aumentare il coinvolgimento degli studenti nel processo di apprendimento.

Lo scopo delle tecnologie nell'aula di matematica è di svolgere una serie di compiti di natura matematica. La tecnologia ha il potenziale di essere una "piattaforma per preparare il terreno alle intuizioni degli studenti e per sviluppare la comprensione, con opportunità per gli studenti di esplorare e indagare sui modelli di comportamento matematico" (Scardamalia, Bereiter, 2014).

La tecnologia utilizzata come strumento di gestione offre a insegnanti e studenti di matematica un modo per lavorare più efficientemente ed efficacemente su compiti e attività. Questi tipi di strumenti consentono agli insegnanti di essere più organizzati, di utilizzare le risorse tecnologiche per la preparazione delle lezioni, la modifica e l'aggiornamento delle istruzioni in maniera più rapida.

Il costante sviluppo delle nuove tecnologie, le ICT (*Information and communication technology*) negli ambienti educativi a sostegno, appunto, della didattica, ha apportato numerosi cambiamenti, anche radicali e netti, sia nella progettazione che nell'esperienza stessa di apprendimento. Affinché le tecnologie siano utili, efficaci e correttamente utilizzate, vanno presi in considerazione i meccanismi cognitivi e psicologici sottostanti, ma anche il possibile divario che esiste tra le tecnologie e lo studente nonché le competenze che gli educatori stessi devono acquisire per una loro più efficace gestione.

Uno dei compiti fondamentali che gli insegnanti devono affrontare oggi è integrare la tecnologia nella loro classe per facilitare l'apprendimento e migliorare il

rendimento degli studenti. Per svolgere questo compito, spesso sviluppano un contesto potenziato dalla tecnologia e dai nuovi strumenti di comunicazione e interazione visiva. Questo non è certamente un obiettivo semplice da realizzare né tantomeno un compito facile per gli insegnanti che di solito non hanno sufficiente esperienza di insegnamento e il primo ostacolo da superare è proprio quello di definire un ambiente di apprendimento da una prospettiva di progettazione didattica e vederlo come un sistema di acquisizione della conoscenza dinamico. Come si è avuto modo di vedere in precedenza, un "ambiente di apprendimento" efficace e positivo include tutta una serie di dimensioni importanti che abbracciano insieme comunità sociali, scuole, aule connesse costantemente grazie anche alle nuove forme di tecnologia moderna. Le componenti importanti di cui qualsiasi ambiente educativo si avvale, ovvero (1) obiettivi di apprendimento, (2) persone, (3) risorse e (4) strategie, collaborano assieme in maniera dinamica e integrata, coadiuvate dalla tecnologia. Quando si parla di risorse informatiche e tecnologiche ci si riferisce a tutte le strutture, attrezzature, hardware, software e strumenti di comunicazione e informazione ed anche le risorse di apprendimento come materiali sia online che in formato cartaceo ma anche ausili visivi come le mappe. Tutte queste risorse didattiche rappresentano i “mattoni” di un ambiente di apprendimento al passo coi tempi, stimolante e dinamico (Ivi, pp. 270-271).

Lo scopo finale di qualsiasi strategia in qualsiasi ambiente di apprendimento potenziato dalla tecnologia è quello di supportare i discenti nel raggiungere obiettivi in modo efficace ed efficiente. Jonassen (2000) ha offerto un elenco di modi in cui la tecnologia potrebbe essere utilizzata a tal fine, sostenendo che essa è un processo complesso e integrato che coinvolge persone, procedure, idee, dispositivi e contesto per analizzare i problemi e ideare, implementare, valutare e cercare soluzioni ai problemi, coinvolgendo lo studente e il docente in tutti gli aspetti dell'apprendimento. Secondo Jonassen (ibidem) questa tecnologia consiste in progetti e ambienti che incoraggiano e arricchiscono l'apprendimento, nonché in tecniche o metodi affidabili per l'apprendimento coinvolgente come strategie di apprendimento cognitivo e capacità di pensiero critico.

Programmi informatici e software, che forniscono agli studenti feedback formativi e costruttivi, nonché valutativi mentre avanzano nei loro compiti di apprendimento,

sono spesso utilizzati in un ambiente di apprendimento coadiuvato dalle risorse tecnologiche e ciò consente agli insegnanti di fornire assistenza tempestiva ai propri studenti. La tecnologia, in definitiva, crea conoscenza, veicola le informazioni e incoraggia l'esplorazione, supporta il learning *by doing*, *by reflecting* e *by conversing*. Un ambiente di apprendimento potenziato dalla tecnologia è in grado di motivare le persone, in particolare i suoi discenti, all'arricchimento delle risorse di apprendimento, all'implementazione delle strategie di acquisizione delle conoscenze e istruzione e alla valutazione degli obiettivi di apprendimento. Questo tipo di contesto educativo, infine, incoraggia una buona integrazione della tecnologia all'interno dell'ambiente scolastico e offre ai suoi studenti uno spazio favorevole per l'acquisizione di nuove conoscenze e per il raggiungimento degli obiettivi di apprendimento. Questi ambienti così costruiti dunque, consentono l'accesso a una gamma di materiali, strumenti di apprendimento e strutture di comunicazione, e possono essere considerati contesti costruttivisti ideali che consentono agli studenti di essere più attivamente coinvolti nello sviluppo delle loro conoscenze.

CAPITOLO IV

PROVE DI COMPETENZA MATEMATICA: ASPETTI E CRITICITÀ

4.1. La normativa sulle competenze nel biennio della secondaria di secondo grado

L'apprendimento per competenze è definito normativamente come successo formativo[10] in termini di orientamento al lavoro e, più in generale, alla vita stessa. La competenza, in questo senso, è l'attitudine proattiva alla complessità della realtà attraverso un'interazione virtuosa di conoscenze e abilità raggiunta dal soggetto in continuo apprendimento.

In tale direzione, la matematica entra – e *deve* entrare – in contatto con le altre discipline, in modo da costituire un *unicum* dinamico di idee ed esperienze che fornisca la possibilità di un approccio positivo rispetto a quanto ci circonda.

All'interno del quadro europeo, la Raccomandazione del Consiglio dell'UE del 22 maggio 2018 sulle "*Competenze chiave per l'apprendimento permanente*" delinea tali competenze come elementi di cui tutti hanno bisogno per la realizzazione e lo sviluppo personali, l'occupabilità, l'inclusione sociale, uno stile di vita sostenibile, una vita fruttuosa in società pacifiche, una gestione della vita attenta alla salute e la cittadinanza attiva. Esse si sviluppano in una prospettiva di apprendimento permanente, dalla prima infanzia a tutta la vita adulta, mediante l'apprendimento formale, non formale e informale in tutti i contesti, compresi la famiglia, la scuola, il luogo di lavoro, il vicinato e altre comunità[11].

Pertanto, discutere di competenza matematica senza far riferimento agli altri saperi è tornare al modello organicistico del sapere, nel quale le capacità e le attitudini sono slegate le une dalle altre. Lo studente che ha sviluppato competenza matematica, in questo caso, sarebbe assimilabile a un mero strumento di calcolo o a un misuratore di spazi. Le competenze indicate – anche se di livello diverso – devono essere intrecciate in maniera inestricabile. La conoscenza necessaria in

[10] DPR 89/2010, DPR 275/1999

[11] Gazzetta Ufficiale dell'Unione Europea (04/06/2018) – Allegato C 189/7

campo matematico da un lato comprende una solida conoscenza dei numeri, delle misure e delle strutture, delle operazioni fondamentali e delle presentazioni matematiche di base, la comprensione dei termini e dei concetti matematici e la consapevolezza dei quesiti cui la matematica può fornire una risposta; ma dall'altro occorre saper applicare i principi e i processi matematici di base nel contesto quotidiano, nella sfera domestica e lavorativa (ad esempio in ambito finanziario) nonché seguire e vagliare concatenazioni di argomenti, e ciò può accadere solo se le competenze sono coniugate. Un ragionamento matematico, la comprensione delle prove matematiche e la comunicazione in linguaggio matematico necessitano di logica e astrazione: ma ciò vale per tutti i campi del sapere e, se vogliamo, dell'essere e della dialettica[12].

4.1.1 Il quadro italiano

L'ordinamento nazionale in merito all'istruzione e alla formazione sancisce, per ogni studente delle scuole secondarie di secondo grado, la redazione della Certificazione delle Competenze in relazione all'assolvimento dell'obbligo di istruzione decennale, quindi al termine del biennio[13].

Tale Certificazione fa riferimento al Quadro Europeo per le Qualifiche (il sistema di riferimento che confronta e collega le qualifiche dei diversi Paesi dell'Unione Europea) secondo il livello EFQ 2.

La redazione della Certificazione delle Competenze è compito dei consigli di classe in fase di scrutinio finale, che attribuiscono i livelli raggiunti da ciascuno studente in coerenza con la valutazione finale degli apprendimenti espressa in decimi, secondo tre gradi:

- *Livello di base*: lo studente svolge compiti semplici in situazioni note, mostrando di possedere conoscenze ed abilità essenziali e di saper applicare regole e procedure fondamentali. Nel caso in cui non sia stato raggiunto il livello base, è riportata l'espressione "livello base non raggiunto" con l'indicazione della relativa motivazione. Voto corrispondente 6.

[12] Aristotele (IV Secolo a.C.), *Organon*
[13] D.M. 139/07, D.M. 9/2010

- *Livello intermedio*: lo studente svolge compiti e risolve problemi complessi in situazioni note, compie scelte consapevoli, mostrando di saper utilizzare le conoscenze e le abilità acquisite. Voto corrispondente 7-8.
- *Livello avanzato*: lo studente svolge compiti e problemi complessi in situazioni anche non note, mostrando padronanza nell'uso delle conoscenze e delle abilità. Sa proporre e sostenere le proprie opinioni e assumere autonomamente decisioni consapevoli. Specificare la prima lingua straniera studiata. Voto corrispondente 9-10.

Le singole istituzioni scolastiche, nel loro grado di autonomia, progettano il curricolo al fine di definire:

- l'esame della situazione iniziale dello studente con l'analisi dei livelli di partenza o dei prerequisiti;
- gli obiettivi da selezionare o costruire nel contesto delle finalità di fine obbligo scolastico definiti dal D.M. 139/07 e D.M. 9/2010;
- il percorso con i contenuti mono e pluridisciplinari, la definizione dei metodi, dei mezzi, dei tempi, e dei criteri di verifica;
- le azioni dell'istituzione scolastica per l'autovalutazione formativa – valutazione del sistema;
- le competenze con misurazione (voto con prova riassuntiva di attività di studio e di ricerca attiva), valutazione (giudizio quale esito di un lungo periodo di osservazioni sistematiche) e certificazione finale (attestato).

Il Collegio dei docenti, perciò, promuove specifici percorsi, coerentemente con quanto specificato nel Rapporto di Autovalutazione d'Istituto e il Piano di Miglioramento, al fine di certificare le competenze non solo mediante l'azione didattica tout-court, ma anche attraverso l'implementazione di progetti, laboratori ed attività di educazione alla legalità e di valorizzazione delle educazioni.

In base a tali requisiti, dunque, è rilasciata la Certificazione delle Competenze al termine del primo biennio delle Scuole superiori di Secondo Grado secondo il modello (Fig. 4.1) fornito dalle indicazioni del DM MIUR 9/2010.

CERTIFICATO delle COMPETENZE DI BASE

MINISTERO DELL'ISTRUZIONE DELL'UNIVERSITA' E DELLA RICERCA
UFFICIO SCOLASTICO REGIONALE PER _____

CERTIFICATO delle COMPETENZE DI BASE acquisite nell'assolvimento dell'obbligo di istruzione

Anno Scolastico 202_/202_

N°.....

IL DIRIGENTE SCOLASTICO

visto il regolamento emanato dal Ministro dell'Istruzione, Università e Ricerca (ex Ministro della Pubblica Istruzione) con decreto 22 agosto 2007, n.139; visti gli atti di ufficio;

CERTIFICA

che l... studente/ssa

cognome……..nome …… nato/a il ……/……/……, a ..... Stato ..... iscritto/a presso questo Istituto nella classe II sez. _____ indirizzo di studio ……. nell'anno scolastico 20__/20__ nell'assolvimento dell'obbligo di istruzione, della durata di 10 anni,

ha acquisito

le competenze di base di seguito indicate.

COMPETENZE DI BASE E RELATIVI LIVELLI RAGGIUNTI (1)	
ASSE DEI LINGUAGGI	**LIVELLI**
lingua italiana • Padroneggiare gli strumenti espressivi ed argomentativi indispensabili per gestire l'interazione comunicativa verbale in vari contesti • Leggere comprendere e interpretare testi scritti di vario tipo • Produrre testi di vario tipo in relazione ai differenti scopi comunicativi	**Livello base** **Livello intermedio** **Livello avanzato** **Livello base non raggiunto** perché _____ _____ _____
lingua straniera • Utilizzare la lingua* _____ per i principali scopi comunicativi ed operativi	**Livello base** **Livello intermedio** **Livello avanzato** **Livello base non raggiunto** perché _____
altri linguaggi • Utilizzare gli strumenti fondamentali per una fruizione consapevole del patrimonio artistico e letterario • Utilizzare e produrre testi multimediali	**Livello base** **Livello intermedio** **Livello avanzato** **Livello base non raggiunto** perché _____ _____
ASSE MATEMATICO	**LIVELLI**
• Utilizzare le tecniche e le procedure del calcolo aritmetico ed algebrico, rappresentandole anche sotto forma grafica • Confrontare ed analizzare figure geometriche, individuando invarianti e relazioni • Individuare le strategie appropriate per la soluzione dei problemi • Analizzare dati e interpretarli sviluppando deduzioni e ragionamenti sugli stessi anche con l'ausilio di rappresentazioni grafiche, usando consapevolmente gli strumenti di calcolo e le potenzialità offerte da applicazioni specifiche di tipo informatico	**Livello base** **Livello intermedio** **Livello avanzato** **Livello base non raggiunto** perché _____ _____ _____

ASSE SCIENTIFICO-TECNOLOGICO	LIVELLI
• Osservare, descrivere ed analizzare fenomeni appartenenti alla realtà naturale e artificiale e riconoscere nelle varie forme i concetti di sistema e di complessità • Analizzare qualitativamente e quantitativamente fenomeni legati alle trasformazioni di energia a partire dall'esperienza • Essere consapevoli delle potenzialità e dei limiti delle tecnologie nel contesto culturale e sociale in cui vengono applicate	**Livello base** **Livello intermedio** **Livello avanzato** **Livello base non raggiunto** perché _____ _____ _____
ASSE STORICO-SOCIALE	**LIVELLI**
• Comprendere il cambiamento e la diversità dei tempi storici in una dimensione diacronica attraverso il confronto fra epoche e in una dimensione sincronica	**Livello base** **Livello intermedio** **Livello avanzato**
attraverso il confronto fra aree geografiche e culturali • Collocare l'esperienza personale in un sistema di regole fondato sul reciproco riconoscimento dei diritti garantiti dalla Costituzione, a tutela della persona, della collettività e dell'ambiente • Riconoscere le caratteristiche essenziali del sistema socio economico per orientarsi nel tessuto produttivo del proprio territorio	**Livello base non raggiunto** perché _____ _____ _____

Le competenze di base relative agli assi culturali sopra richiamati sono state acquisite dallo studente con riferimento alle competenze chiave di cittadinanza di cui all'allegato 2 del regolamento citato in premessa (1. imparare ad imparare; 2. progettare; 3. comunicare; 4. collaborare e partecipare; 5. agire in modo autonomo e responsabile; 6. risolvere problemi; 7. individuare collegamenti e relazioni; 8. acquisire e interpretare l'informazione).

_____a, _____ IL DIRIGENTE SCOLASTICO

(1) livelli relativi all'acquisizione delle competenze di ciascun asse:

LIVELLO BASE: lo studente svolge compiti semplici in situazioni note, mostrando di possedere conoscenze ed abilità essenziali e di saper applicare regole e procedure fondamentali.
Nel caso in cui non sia stato raggiunto il livello base, è riportata l'espressione ***"livello base non raggiunto"****, con l'indicazione della relativa motivazione*
LIVELLO INTERMEDIO: lo studente svolge compiti e risolve problemi complessi in situazioni note, compie scelte consapevoli, mostrando di saper utilizzare le conoscenze e le abilità acquisite.
LIVELLO AVANZATO: lo studente svolge compiti e problemi complessi in situazioni anche non note, mostrando padronanza nell'uso delle conoscenze e delle abilità. Es. proporre e sostenere le proprie opinioni e assumere autonomamente decisioni consapevoli.

* Specificare la **prima lingua straniera studiata**.

Fig. 4.1: Modello Certificato delle competenze di base

4.2 Caratteristiche delle prove di competenza

All'interno del quadro di una valutazione formativa, le prove di verifica sono necessarie per accertare non solo conoscenze ed abilità, ma la loro interazione per portare a termine un compito complesso, che richieda più dimensioni di pensiero e azione per il raggiungimento di un risultato. La competenza non risiede nelle risorse da mobilitare, ma nella mobilitazione di queste risorse, una mobilitazione che non rientra nell'ordine della semplice applicazione, ma della costruzione (Le Boterf, 1995).
È quindi un concetto che allude ad una realtà dinamica, ad un processo piuttosto che ad uno stato, e all'idea della contingenza: la competenza è contestualizzata e finalizzata, indissociabile dalle condizioni della sua messa in atto.
Questo aspetto la riconduce alla capacità di analisi e risoluzione dei problemi in un contesto specifico: saper agire in un contesto di lavoro significa misurarlo e adattarsi ad esso. In altri termini, essere flessibili.
Ciò vuol dire che la competenza varia in funzione dell'evoluzione della situazione all'interno della quale viene esercitata attraverso la combinazione dei diversi elementi che la compongono.
Una prova di competenza ben costruita deve spingere a mobilitare una serie di saperi così definibili:

- *saperi teorici*: i concetti, gli schemi assimilatori, le conoscenze disciplinari (*il sapere che*);
- *saperi procedurali*: le regole per agire, i saperi operativi in funzione di un'azione da realizzare (*il sapere come*);
- *saper fare procedurali*: l'applicazione pratica dei saperi procedurali, la gestione di una procedura (*il saper fare*);
- *saper fare esperienziali*: il sapere che deriva dall'azione, dall'esperienza pratica;
- *saper fare sociali*: attitudini, qualità personali, valori, il saper essere.

Una risposta positiva a una prova di competenza è perciò accompagnata da un moto di consapevolezza di sé, delle proprie risorse e del meccanismo tramite il quale queste interagiscono. Tale capacità, assimilabile al *saper essere*, si attiva in presenza di metaconoscenze, che risultano essenziali per la competenza perché permettono al soggetto di gestire e controllare le proprie azioni: è solo quando si è in grado di prendere le distanze dal proprio funzionamento cognitivo che lo si può orientare e perfezionare.

Le metaconoscenze consentono di guidare il proprio apprendimento passando dalla percezione all'appercezione, ossia alla consapevolezza del proprio funzionamento cognitivo.

Il soggetto arriva a prendere le distanze dalle azioni che compie e a descriverle, ma è una presa di distanza che si distingue dalla riflessione sull'oggetto dell'azione. Se infatti le metaconoscenze consentono di descrivere i saper fare messi in atto, è con la metacognizione che si ha la possibilità di delineare la modalità in cui si descrivono i saper fare (Flavell, 1976).

La prova di competenza deve stimolare innanzitutto la metacognizione, che è il presupposto per l'*imparare ad imparare*, capacità che prima di altre evidenzia il carattere continuo dell'apprendimento propriamente detto.

Queste considerazioni pongono in essere una serie di caratteri imprescindibili che una prova di verifica deve possedere affinché possa dirsi *prova per competenze* (Paparella, 2012):

- *Effettività*: la competenza deve essere individuabile in modo specifico
- *Azione*: la competenza deve prevedere un campo con stimoli ed opportunità

in grado di mobilitare gli apprendimenti previsti, mirata ad uno scopo dotato di valore

- *Significatività*: la competenza deve essere cruciale in rapporto alla meta che si propone
- *Riconoscibilità*: la competenza deve essere riconosciuta in modo evidente dai diversi attori
- *Validità*: il valore della competenza deve essere riconosciuto da tutti gli attori coinvolti nel proprio campo di esperienza

Ciò presuppone due aspetti decisamente complessi in rapporto alle consuete modalità con cui viene gestita la valutazione degli apprendimenti in ambito formativo:

- da un lato lo spostamento del focus valutativo sulle competenze, in alternativa a una valutazione formativa prevalentemente centrata sull'accertamento delle conoscenze e delle abilità;
- dall'altro il riferimento a un insieme di apprendimenti di tipo trasversale, riferiti alle competenze chiave.

Il passaggio a prove fondate su una centralità assegnata alle competenze sul piano valutativo comporta almeno tre implicazioni, strettamente connesse ai tratti che qualificano il concetto di competenza stessa:

- il passaggio da un *approccio statico* alla valutazione degli apprendimenti, orientato ad accertare la quantità e la qualità degli apprendimenti che il soggetto possiede a un *approccio più dinamico,* orientato a osservare come il soggetto sappia usare il proprio sapere per affrontare compiti che la sua esperienza di vita gli pone;
- il passaggio da un *approccio analitico* alla valutazione, teso a scomporre il processo di apprendimento nei suoi elementi costitutivi per poterlo apprezzare e misurare con maggiore precisione (pensiamo ai processi di operazionalizzazione degli obiettivi impiegati in chiave valutativa), a un *approccio più olistico,* attento a cogliere la capacità del soggetto di mobilitare globalmente il proprio sapere per affrontare situazioni complesse;

- il passaggio da un *approccio decontestualizzato* alla valutazione degli apprendimenti, il cui scopo consiste nel cogliere la quota di sapere di cui si è appropriato il soggetto in termini di conoscenze e abilità astratte, a un *approccio più contestualizzato*, il cui scopo tende a spostarsi sull'apprezzamento delle capacità dell'allievo di muoversi all'interno di contesti operativi.

In senso complessivo, potremmo dire che la centralità del momento valutativo sulle competenze comporta un deciso spostamento di campo da una visione riproduttiva dell'apprendimento, per la quale il ruolo affidato alla valutazione tende a divenire l'accertamento del livello di fedeltà con cui si manifesta nel soggetto la riproposizione di un sapere dato, a una visione rielaborativa dell'apprendimento, per la quale la sfida assegnata alla valutazione consiste nel riconoscere la capacità del soggetto di utilizzare il proprio sapere nei contesti della vita reale.

Sul piano operativo, una volta che si abbia piena consapevolezza di questo viraggio, la strutturazione di un impianto valutativo si fonda sul principio di triangolazione soggettivo-intersoggettivo-oggettiva (Castoldi, 2013):

- La *dimensione soggettiva* richiama i significati personali attribuiti dal soggetto alla sua esperienza di apprendimento: il senso assegnato al compito operativo su cui manifestare la propria competenza e la percezione della propria adeguatezza nell'affrontarlo, delle risorse da mettere in campo e degli schemi di pensiero da attivare. Esso implica un'istanza autovalutativa connessa al modo con cui l'individuo osserva e giudica la sua esperienza di apprendimento e la sua capacità di rispondere ai compiti richiesti dal contesto di realtà in cui agisce.
- La *dimensione intersoggettiva* richiama il sistema di attese, implicito o esplicito, che il contesto sociale esprime in rapporto alle capacità del soggetto di rispondere adeguatamente al compito richiesto; riguarda le persone a vario titolo coinvolte nella situazione in cui si manifesta la competenza e l'insieme delle loro aspettative e delle valutazioni espresse (ad esempio: rappresentanti del mondo professionale o della comunità sociale di appartenenza). La dimensione intersoggettiva implica quindi un'istanza sociale connessa al modo in cui i soggetti appartenenti alla

comunità sociale entro cui avviene la manifestazione della competenza percepiscono e giudicano il comportamento messo in atto.

- *La dimensione oggettiva* richiama le evidenze osservabili che attestano la prestazione del soggetto e i suoi risultati, in rapporto al compito affidato e, in particolare, alle conoscenze e alle abilità che la manifestazione della competenza richiede. Essa implica un'istanza empirica connessa alla rilevazione in termini osservabili e misurabili de comportamento del soggetto in relazione al compito assegnato e al contesto operativo entro cui si trova ad agire.

4.3 Relazione tra prove di competenza e normativa nazionale

Esiste in effetti anche per la matematica, almeno sulla carta, una coerenza sistemica tra le prove di competenza così come state definite e l'approccio alla valutazione per competenze nell'azione docente secondo alcune linee indicate dalla normativa, che si concretizza nello strumento didattico della Unità di Apprendimento[14].
Una Unità di Apprendimento – UdA - è un'occasione didattica significativa per gli allievi, che tiene conto dell'unitarietà del sapere tipica del concetto di competenza e non si limita alla sola trasmissione di conoscenze e abilità di una singola materia, ma tende alla formazione integrale della persona, sviluppando competenze (trasversali e disciplinari) attraverso l'utilizzo di una didattica laboratoriale.
L'UdA pone lo studente al centro dell'azione didattica e, richiedendo la sua partecipazione attiva, in modo individuale o in gruppo, favorisce la costruzione personale delle conoscenze; inoltre, ricorrendo ad attività e strategie diversificate, anche innovative e tecnologiche, consente la personalizzazione dell'apprendimento.
Nella realizzazione concreta di un'UdA si richiede una continua attenzione ai processi di apprendimento dei ragazzi e una notevole flessibilità per riadattare il percorso in itinere in base alle risposte degli allievi e alle opportunità di approfondimento e/o ampliamento che si potrebbero presentare.

[14] Es.: D.M. 92/2018, art. 2

L'UdA è dunque un percorso formativo finalizzato a promuovere e sviluppare competenze, che verifica tramite i compiti di realtà e i prodotti e valuta mediante rubriche. I livelli di competenza raggiunti possono appunto essere verificati tramite delle prove di competenza, anche dette prove esperte, che sono prove di verifica che non si limitano a misurare conoscenze ed abilità, ma soprattutto le capacità dell'allievo di risolvere problemi aperti (problem solving), di argomentare, interpretare ed analizzare, di produrre – ad esempio - un microprogetto. I compiti sono dunque complessi, dato il coinvolgimento consapevole dell'alunno e dei diversi saperi.

Nella prassi quotidiana del fare scuola (Vertecchi, 2002), purtroppo, queste indicazioni docimologiche sono spesso ancora disattese. I docenti, per formazione e tradizione se vogliamo, rimangono per larga parte ancorati a modalità di verifica che consistono in prove di carattere nozionistico a seguito di una serie di lezioni frontali. La "*lezione-monologo*", oggi, è, probabilmente, la più diffusa nella nostra scuola. Il docente parla poco o a lungo; apprendere diventa la conseguenza diretta dell'insegnare; la lezione *ex cathedra*, pur essendo, da tempo, il bersaglio di molti, continua a dominare imperterrita. Il protagonista è il docente, che si preoccupa di trasmettere conoscenze in modo logico e preciso - dal suo punto di vista - e lascia, in genere, poco spazio al feedback.

Il percorso di insegnamento prescinde, inoltre, dai prerequisiti cognitivi specifici. Si dà quindi per scontato che tutti possiedano i livelli di apprendimento richiesti per il tipo di itinerario che si vuole mettere in atto. Il tempo concesso dal docente è uguale per tutti, a dispetto del fatto che ognuno assimila il materiale apprenditivo con i propri ritmi e che gli allievi hanno caratteristiche diverse (eterogeneità delle competenze e delle opportunità culturali di partenza; diversi stili di apprendimento, etc.).

La valutazione ha di conseguenza un ruolo solamente terminale e serve per accertare se gli allievi si sono adattati alla proposta formativa. Il momento valutativo si limita a giudicare il percorso svolto e penalizza coloro che non si sono adattati ad esso. L'insegnamento così espresso, quindi, può essere definito bifasico (Domenici, 2005). Al di là delle sporadiche variazioni contingenti, difatti, due sono i pilastri che sorreggono il far scuola tradizionale: trasmissione delle conoscenze e

la valutazione degli apprendimenti. Il prodotto finale, considerati l'uniformità della proposta formativa e i diversi profili degli allievi, sarà inevitabilmente non omogeneo.

La proposta formativa è ritenuta sempre adeguata sia in una dimensione di consapevolezza sia di inconsapevolezza. È sufficiente constatare che una parte dei discenti abbia raggiunto risultati positivi, e questo in genere accade, per giudicare idonea la procedura didattica. Il singolo allievo è il solo responsabile del successo o dell'insuccesso scolastico. Questa logica può risultare pertinente all'interno di una scuola a impianto elitaristico, così com'era nel passato, dove erano presenti allievi dalle caratteristiche sostanzialmente omogenee; perde invece il suo senso nella realtà educativa odierna, perché in essa l'utenza scolastica è fortemente diversificata.

4.4 Le prove standardizzate nella valutazione

Pare evidente, per quanto sostenuto finora, che le prove standardizzate non possano cogliere la dimensione complessiva delle competenze, poiché esse richiedono un livello di metaconoscenze univoco da parte di una platea di discenti estremamente eterogenea.

Non è comunque il caso di escludere le prove standardizzate dalla schiera degli strumenti valutativi. La prova standardizzata, per sua natura, evita gli effetti di stereotipia, di alone, di ancoraggio tipici delle prove non standardizzate o non semi strutturate. Nell'ambito della valutazione formativa, essa non deve essere l'unico strumento di valutazione, ma deve contribuire all'osservazione continua del livello di apprendimento del discente all'interno di una programmazione per Unità di Apprendimento. Se la valutazione è lungo tutto il percorso didattico, ebbene, la prova standardizzata è *un momento valutativo tra gli altri*, perfettamente utile e adeguato – ad esempio – a verificare il livello di conoscenze e abilità che concorrono alla competenza come requisiti necessari ma, parafrasando il linguaggio matematico, non sufficienti.

È certamente ovvio che anche le prove standardizzate debbano essere progettate secondo criteri di adeguatezza tali da fornire informazioni significative. In

particolare esse, per ciò che attiene alla costruzione dei quesiti – item -, devono rispondere a valori di (Bonazza, 2019):

- *Attendibilità*: la stimolazione è rappresentativa e omogenea per tutti i discenti. A ogni allievo vengono somministrati gli stessi quesiti per accertare le medesime abilità culturali, secondo lo stesso tempo a disposizione. Gli item delle prove devono essere costruiti con chiarezza e rigore, seguendo determinate modalità. La fase di registrazione viene ad essere fedele, poiché i discenti scelgono le risposte che ritengono corrette: dunque sia la stimolazione che la registrazione sono indipendenti dal docente. Inoltre, grazie alla decisione (precedente la somministrazione) di predeterminare le risposte corrette ed i punteggi, leggere una prova oggettiva vuol dire limitarsi a contare le risposte corrette. La soggettività del correttore, in questo modo, è annullata.
- *Validità*: Nel caso di uno strumento valutativo, esso può dirsi valido quando la misura che esprime ha rilevato effettivamente l'oggetto della misurazione. Stabilito quindi l'oggetto della misurazione in relazione agli obiettivi di apprendimento, è fondamentale che la prova sia direttamente connessa a quel tipo di obiettivi. Al riguardo è necessario utilizzare con precisione la tassonomia (le tassonomie) e prestare attenzione al linguaggio. Qualsiasi misurazione, anche la più corretta dal punto di vista tecnico, e quindi anche la più attendibile, perde efficacia didattica se non è strettamente correlata all' oggetto della misurazione. Occorre precisare, comunque, che la validità può essere assicurata nei test di classe (*classroom test*): cioè, in quelle prove che i docenti elaborano autonomamente soprattutto in attenzione della funzione formativa della valutazione, essa è in un certo senso garantita per *assunzione*: gli stimoli vengono strutturati sulla base di una diffusa conoscenza degli allievi e del grado di approfondimento con cui si è trattato lo specifico ambito conoscitivo in relazione al quale si compie la verifica.

Esistono, però, per quanto attiene alle prove strutturate, obiezioni relative al loro utilizzo, che devono però essere attentamente analizzate in quanto, spesso, luoghi comuni (Frignani e Bonazza, 2003).

La prima obiezione è quella secondo la quale le prove oggettive di profitto *spersonalizzano* l'interazione educativa e sono una forma di valutazione troppo fredda. L'uso delle prove oggettive di profitto consente, al contrario, un superamento della riscontrata assenza di comunicazione tra docenti e allievi. La rapidità degli accertamenti da esse favorita costituisce infatti una buona premessa per lo sviluppo di feconde interazioni tra gli allievi e l'insegnante, necessarie per favorire buoni risultati sul piano cognitivo. La critica, pur non essendo pertinente alle finalità didattiche di uno strumento valutativo, semmai è consona alle prove di tipo tradizionale in cui è evidente un rapporto di tipo gerarchico. Nelle interrogazioni, infatti, emerge spesso una marcata asimmetria tra il docente e l'alunno.

Le prove strutturate di conoscenza, in virtù della loro "*sbrigatività*", se vogliamo, consentono anche un grosso risparmio di tempo. Il risparmio di tempo, oltre a favorire una migliore comunicazione nella scuola, deve essere visto come un'importante risorsa per la didattica.

Una seconda obiezione è quella per la quale le prove standardizzate penalizzano i processi intellettuali superiori limitandosi a rilevare capacità riproduttive e nozionistiche. Tutto in realtà dipende dalle modalità di costruzione: l'attività didattica non è il prodotto dell'intuizione o dell'estro creativo di chi insegna, bensì di competenze professionali, tra le quali quelle docimologiche sono prioritarie. Dunque anche le prove standardizzate possono, se elaborate con criteri precisi di riferimento in merito ad ambiente di apprendimento e coerenza con la valutazione formativa, determinazione e analisi degli obiettivi, lunghezza della prova e ampiezza della stessa per argomenti, ordine degli item e attribuzione dei punteggi, rilevare perlomeno l'applicazione delle conoscenze, e dunque le abilità.

Una terza obiezione è che sono troppe le possibilità di rispondere bene a caso, così che spesso gli esiti positivi conseguiti non rispecchiano le reali competenze degli allievi. Questa accusa vorrebbe mettere in discussione le caratteristiche metriche delle prove oggettive: queste ultime non misurerebbero pertanto le abilità culturali possedute dagli allievi. La ricerca docimologica, invece, ha dimostrato che in una prova oggettiva ben costruita (con un buon numero di item), l'incidenza delle risposte casuali è estremamente limitata. In una prova composta da un singolo item

del tipo vero/falso, è evidente che la possibilità di rispondere bene in maniera casuale è molto alta. Esiste, cioè, una possibilità su due di scegliere la risposta corretta. Se in una quella prova, invece, ci fosse un solo item a risposta multipla, supponiamo con quattro alternative, la possibilità di rispondere bene a caso diminuirebbe (25%). Perciò in prove composte da più item a scelta multipla, la probabilità di rispondere bene a caso diminuisce sempre di più.

4.5 Le rilevazioni OCSE PISA

L'indagine PISA - acronimo di *Programme for International Student Assessment* - è un'iniziativa internazionale promossa dall'OCSE (Organizzazione per la Cooperazione e lo Sviluppo Economico), organizzata, a partire dal 2000, con cadenza triennale. Essa rappresenta la più estesa rilevazione nel campo dell'educazione e offre a scuole, sistemi di istruzione e governi l'opportunità di individuare di volta in volta gli aspetti da migliorare, rendendo possibile un confronto tra il rendimento degli studenti all'età di 15 anni e i contesti di apprendimento dei diversi Paesi riguardo tre domini principali: Lettura, Matematica e Scienze. Ogni ciclo dell'indagine rileva le competenze in tutti e tre i domini ma ne approfondisce uno in particolare. Il dominio della Matematica è stato approfondito nelle rilevazioni del 2003 e del 2012 (insieme al problem solving) e ha rappresentato l'ambito principale di rilevazione nel 2022. In ciascun Paese la rilevazione interessa dai 5000 ai 10000 studenti di almeno 150 scuole, il che fornisce una base di campionamento valida, tale da consentire una aggregazione dei risultati sulla base di una pluralità di caratteristiche degli studenti.

Ad oggi l'indagine è arrivata alla sua ottava edizione, PISA 2022, prevista per il 2021 ma rinviata a causa della pandemia da COVID-19, coinvolgendo più di 85 Paesi.

Per comprendere le caratteristiche delle prove di matematica proprie del PISA, è necessario riprendere la definizione di riferimento OCSE-PISA del relativo framework in termini di *mathematical literacy*, secondo cui la competenza matematica ha come pilastri formulazione, impiego ed interpretazione della

matematica in una varietà di contesti, in modo da descrivere, predire e spiegare fenomeni e determinare scelte condivise in campo sociale.

Il quadro di riferimento 2012 utilizza una formulazione modificata di questa serie di capacità, riducendone il numero da otto a sette sulla base delle analisi del MEG relative all'utilizzo di tali competenze attraverso item PISA somministrati in precedenza (Turner et al., 2013).

Le sette capacità matematiche fondamentali utilizzate in tale quadro di riferimento sono le seguenti:

- *Comunicazione*: la mathematical literacy implica la comunicazione. L'individuo percepisce l'esistenza di una sfida ed è stimolato a riconoscere e capire una situazione problematica. Lettura, decodifica e interpretazione di dichiarazioni, domande, compiti o oggetti consentono all'individuo di formare un modello mentale della situazione, che è un passo importante per comprendere, chiarire e formulare un problema. Durante il processo di elaborazione della soluzione, potrebbe essere necessario che i risultati intermedi siano sintetizzati o presentati. Successivamente, una volta trovata una soluzione, il processo può doversi concludere con una spiegazione o giustificazione della stessa.
- *Matematizzazione*: la mathematical literacy può implicare la trasformazione di un problema definito nel mondo reale in una forma strettamente matematica (che può includere strutturazione, concettualizzazione, formulare ipotesi e/o formulare un modello) o interpretare e valutare un risultato matematico o un modello matematico in relazione al problema originale.
- *Rappresentazione*: la mathematical literacy comporta spesso rappresentazioni di oggetti e situazioni matematiche. Ciò può comportare la selezione, l'interpretazione, l'utilizzo una varietà di rappresentazioni per esporre una situazione, interagire con un problema o presentare il proprio lavoro. Le rappresentazioni richiamate includono grafici, tabelle, diagrammi, immagini, equazioni, formule e materiali concreti.
- *Ragionamento e argomentazione*: questa capacità implica un pensiero logicamente radicato attraverso processi che esplorano e collegano gli

elementi del problema in modo da ricavarne inferenze, verificare un'ipotesi che viene fornita o fornire una giustificazione di affermazioni o soluzioni ai problemi.

- *Elaborazione di strategie per la risoluzione dei problemi*: la mathematical literacy richiede spesso di elaborare strategie per risolvere i problemi matematicamente. Ciò comporta una serie di processi critici di controllo che guidano un individuo a riconoscere efficacemente gli scenari, formulare idee e trovare soluzioni. Questa abilità è caratterizzata dalla selezione di un piano d'azione per utilizzare la matematica al fine di risolvere problemi derivanti da un compito o contesto. Questa capacità matematica può essere richiesta in una qualsiasi delle fasi del processo di risoluzione dei problemi.
- *Utilizzo di un linguaggio simbolico, formale e tecnico e di operazioni*: la mathematical literacy richiede l'uso di linguaggi e operazioni simboliche, formali e tecniche. Ciò implica comprendere, interpretare, manipolare e utilizzare espressioni simboliche all'interno di un contesto matematico (incluse aritmetica, espressioni e operazioni) regolate da convenzioni e regole matematiche. Da ciò risulta necessaria anche la comprensione e l'utilizzo di costrutti basati su definizioni e sistemi formali e algoritmi basati su queste entità. I simboli, le regole e i sistemi utilizzati variano a seconda dello specifico compito da formulare, risolvere o interpretare.
- *Utilizzo di strumenti matematici*: gli strumenti matematici includono strumenti fisici, ad esempio strumenti di misura, così come calcolatrici e strumenti informatici che sono man mano divenuti sempre più disponibili. Oltre a sapere come utilizzare questi strumenti per la risoluzione di compiti matematici, gli studenti devono conoscere i limiti e le possibilità di tali strumenti. Inoltre gli strumenti matematici possono avere un ruolo importante nella comunicazione dei risultati.

In figura 4.2 è riassunto il modo in cui tali competenze si esplicitano all'interno dei processi[15].

[15] Fonte PISA 2012, Quadro di Riferimento analitico per la Matematica, la Lettura, le Scienze, il Problem Solving e la Financial Literacy ed italiana (p. 32)
http://www.invalsi.it/invalsi/ri/pisa2012.php?page=pisa2012_it_06

Relazione tra processi matematici (prima riga in alto) e capacità matematiche fondamentali (prima colonna a sinistra)

	Formulazione di situazioni in forma matematica	Utilizzo di concetti, fatti, procedimenti e ragionamenti matematici	Interpretazione, applicazione e valutazione dei risultati matematici
Comunicazione	Leggere, decodificare e interpretare affermazioni, domande, compiti, oggetti, immagini o animazioni (nella rilevazione computerizzata) al fine di creare un modello mentale della situazione	Articolare una soluzione, illustrare il lavoro necessario per arrivare alla soluzione e/o riassumere e presentare i risultati matematici intermedi	Elaborare e comunicare spiegazioni e argomentazioni nel contesto del problema
Matematizzazione	Identificare le variabili e le strutture matematiche soggiacenti al problema reale e formulare delle ipotesi per poterle utilizzare	Utilizzare la comprensione del contesto per orientare o organizzare il processo matematico di risoluzione, ad es. lavorare con un livello di precisione adeguato al contesto	Comprendere la portata e i limiti di una soluzione matematica derivanti dall'impiego di un determinato modello matematico
Rappresentazione	Creare una rappresentazione matematica delle informazioni del mondo reale	Dare un senso, mettere in relazione e usare una molteplicità di rappresentazioni nell'interazione con il problema	Interpretare i risultati matematici in diversi formati in relazione alla situazione o all'utilizzo; confrontare o valutare due o più rappresentazioni in relazione a una situazione
Ragionamento e argomentazione	Spiegare, difendere o giustificare la rappresentazione della situazione reale elaborata o individuata	Spiegare, difendere o giustificare il processo e i procedimenti usati per determinare un risultato o una soluzione di natura matematica Collegare le informazioni per giungere a una soluzione matematica, elaborare generalizzazioni o creare argomentazioni a più livelli	Riflettere sulle soluzioni matematiche ed elaborare spiegazioni e argomentazioni che supportino, confutino o qualifichino una soluzione matematica a un problema contestualizzato
Elaborazione di strategie per la risoluzione dei problemi	Selezionare o elaborare un piano o una strategia per inquadrare i problemi contestualizzati in forma matematica	Attivare meccanismi di controllo efficaci nel corso delle varie fasi del procedimento che porta a una soluzione, conclusione o generalizzazione matematica	Elaborare e mettere in atto una strategia finalizzata a interpretare, valutare e convalidare una soluzione matematica a un problema contestualizzato
Utilizzo di un linguaggio simbolico, formale e tecnico e di operazioni	Utilizzare variabili, simboli, diagrammi e modelli standard adeguati al fine di rappresentare un problema reale attraverso un linguaggio simbolico/formale	Comprendere e utilizzare costrutti formali basati su definizioni, regole e sistemi formali; utilizzare algoritmi	Comprendere la relazione esistente tra il contesto del problema e la rappresentazione della soluzione matematica.Usare tale comprensione per orientare l'interpretazione della soluzione nel contesto e determinarne la plausibilità e le possibili limitazioni
Utilizzo di strumenti matematici	Usare strumenti matematici per riconoscere le strutture matematiche o per delineare relazioni matematiche	Conoscere e saper utilizzare adeguatamente i diversi strumenti che possono essere utili durante i processi e i procedimenti finalizzati alla ricerca delle soluzioni	Usare strumenti matematici per accertare la plausibilità di una soluzione matematica ed eventuali sue limitazioni e restrizioni in base al contesto del problema

Fig. 4.2: Relazione tra processi matematici

Riconoscere il coinvolgimento di tali capacità è cruciale per comprendere i criteri di formulazione degli item in quest'ambito, in fase dei tre pilastri formulazione-impiego-interpretazione.

Un buon indizio rispetto alla difficoltà empirica degli item può essere ottenuto considerando quali aspetti delle capacità matematiche fondamentali sono richiesti

per la pianificazione e per la soluzione (Turner e Adams, 2012). Gli item più semplici richiederanno l'attivazione di poche capacità e in un modo relativamente semplice, quelli più complicati pretenderanno l'attivazione complessa di diverse capacità. Predire il livello di difficoltà degli item vuol dire considerare sia il numero che la qualità delle capacità richieste.

Le macroaree della matematica coinvolte nei quesiti sono:

- *Cambiamento e relazioni*
- *Spazio e forma*
- *Quantità*
- *Incertezza e dati*

La definizione di mathematical literacy fa un preciso riferimento ai *contesti* nei quali applicare la matematica. In questo senso, la scelta di strategie e rappresentazioni matematiche appropriate è spesso dipendente dal contesto in cui si pone un problema di matematica. Il contesto è ampiamente considerato come un aspetto della risoluzione dei problemi che impone ulteriori richieste al risolutore del problema (Watson e Callingham, 2003). È dunque importante che un'ampia varietà di contesti sia utilizzata nella valutazione PISA, ed è ciò che effettivamente accade. In questo modo si offre la possibilità di connessione con la più ampia gamma possibile di interessi individuali e con e di situazioni concrete agganciate al mondo reale.

A tal proposito, PISA identifica 4 categorie di contesto per gli item della prova, utili anche per la classificazione valutativa:

- *Personale*: i problemi classificati nella categoria del contesto personale si concentrano sulle attività degli studenti stessi, della loro famiglia o del loro gruppo di pari. I tipi di contesti che possono essere considerati personali possono includere quelli che riguardano la preparazione del cibo, lo shopping, i giochi, la salute personale, il trasporto, lo sport, i viaggi, i progetti di vita.
- *Occupazionale*: i problemi classificati nella categoria del contesto lavorativo sono centrati, come si può immaginare, sul mondo del lavoro. Gli elementi classificati come occupazionali possono avere a che vedere con la misurazione, il costo e l'ordinazione di materiali, oppure possono trattare

problemi di costruzione, buste paga/contabilità, controllo qualità, programmazione/inventario, design/architettura e processo decisionale relativo al lavoro. I contesti occupazionali possono inoltre riguardare qualsiasi livello della forza lavoro, dal lavoro non qualificato ai più alti livelli di lavoro professionale, purché ci si riferisca a situazioni operative identificabili da uno studente di 15 anni.

- *Società*: i problemi classificati nella categoria del contesto sociale si concentrano su questioni attinenti alla comunità civile. Possono coinvolgere applicazioni matematiche relative a sistemi di voto, trasporto pubblico, governo e politiche pubbliche, demografia, marketing, statistica ed economia. Sebbene gli individui siano coinvolti in tutti questi scenari in modo personale, nella categoria di contesto sociale il focus dei problemi è sulla prospettiva della comunità, le cui decisioni devono spesso affidarsi a logiche risolutive di tipo matematico.
- *Scientifico*. I problemi classificati nella categoria scientifica riguardano la relazione della matematica al mondo naturale e alle questioni relative alla scienza e alla tecnologia. Contesti particolari possono includere aree come meteorologia, ecologia, medicina, scienze spaziali, genetica e lo stesso mondo della matematica in quanto "regina delle scienze".

La rappresentazione grafica del ciclo della modellizzazione matematica riportata in figura 4.3 indica una versione idealizzata e semplificata dei passaggi seguiti da chi risolve un problema mostrando la propria literacy matematica.

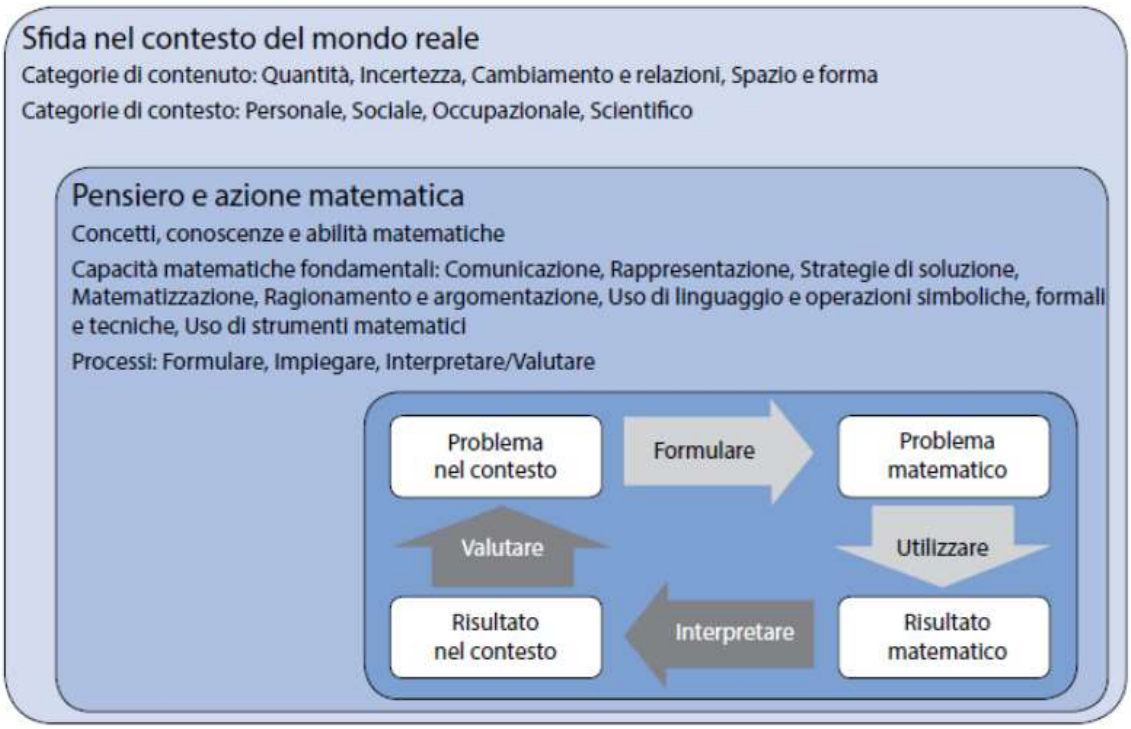


Fig. 4.3: Il ciclo della matematizzazione

(Fonte: OECD, (2013). PISA 2012 Assessment and Analytical Framework: Mathematics, Reading, Science, Problem solving and Financial Literacy, PISA, OECD Publishing. doi: 10.1787/9789264190511-en, p. 26).

.

Nel 2018 la prova somministrata per il dominio matematico è stata caratterizzata da 6 cluster di quesiti, e per ogni cluster gli studenti hanno avuto 30 minuti di tempo a disposizione.

Il format degli item (identico anche per il 2022) sottoposti agli studenti, è stato triplice:

- *a risposta aperta articolata*: gli item a risposta aperta articolata richiedono una risposta estesa. Tale tipologia di quesito può anche chiedere allo studente di mostrare i passaggi utilizzati per spiegare la ragione della risposta. Questi item richiedono esperti qualificati per analizzare e valutare "manualmente" le risposte degli studenti.
- *a risposta aperta univoca*: gli item a risposta aperta univoca forniscono un'impostazione più strutturata per la presentazione delle soluzioni ai problemi e producono una risposta dello studente che può essere facilmente giudicata come corretta o errata. Spesso le risposte degli studenti a domande

di questo tipo possono essere digitate nel software di acquisizione dati e interpretate automaticamente dal software; in altri casi, anche qui, per la valutazione è richiesto l'intervento di esperti qualificati.

- *a scelta multipla*: richiedono agli studenti di scegliere una o più risposte da un numero di opzioni di risposta. L'analisi delle risposte a queste domande di solito possono essere elaborate automaticamente.

Gli esempi di item che seguono intendono illustrare il ventaglio di tipologie, processi, contenuti e contesti che costituiscono le prove OCSE.

L'item Pizze (Fig. 4.4), a risposta aperta articolata, semplice nella forma ma ricco di contenuto, illustra vari elementi del quadro di riferimento per la matematica.

PIZZE
Una pizzeria prepara due pizze dello stesso spessore, ma di diverse dimensioni. La più piccola ha un diametro di 30 cm e costa 30 zed. La più grande ha un diametro di 40 cm e costa 40 zed. Quale pizza è più conveniente? Come sei arrivato(a) alla risposta?
…… ……

Fig. 4.4: Item della prova Pizze (Ciclo Pisa 1999)

Somministrato nel ciclo PISA 1999, è pubblicato, a fini esemplificativi, dal 2003 come esempio in ogni versione del quadro di riferimento per la matematica. Esso è risultato essere una delle prove più difficili tra quelle della prova sul campo per l'indagine 1999, con solo l'11% di risposte corrette. *Pizze* si colloca all'interno della categoria di contesto personale, familiare a molti quindicenni, perché si tratta di trovare quale pizza sia più conveniente per l'acquirente in termini economici. Non essendo difficile da leggere, permette agli studenti di concentrarsi quasi completamente sugli aspetti matematici del compito e, di interpretare matematicamente gli elementi del mondo reale (rotonda, stesso spessore, dimensioni diverse), evidenziati dall'item.

L’ elemento geometrico si inserisce nella categoria di contenuto Spazio e forma: le pizze possono essere modellate come sottili cilindri circolari per cui entra in gioco l’area del cerchio. La domanda rientra anche nella categoria di contenuto Quantità dato che si prospetta l’implicita necessità di raffrontare la quantità di pizza con l’importo in denaro. Tuttavia, la questione principale è la concettualizzazione delle relazioni tra le proprietà delle pizze e il modo in cui le proprietà pertinenti cambiano dalla pizza più grande alla più piccola. Essendo questi gli aspetti centrali del problema, l’item è classificato nella categoria di contenuto Cambiamento e relazioni. Questo item rientra nella categoria di processo Formulazione. Il passaggio chiave per la soluzione del problema, il più difficile sul piano cognitivo, è la formulazione di un modello matematico che integri il concetto di prezzo più conveniente. Lo studente deve comprendere che, essendo lo spessore della pizza in principio uniforme, ed essendo questo identico nelle due pizze, occorre concentrare l’analisi sulla superficie circolare delle pizze e non sul volume o la massa. La relazione tra quantità di pizza e importo in denaro è così traslata nel concetto di prezzo più conveniente modellato come ‘costo per unità di superficie’. Una variante possibile è superficie per costo unitario. In termini matematici, il prezzo più conveniente può essere calcolato direttamente e quindi raffrontato per i due cerchi, ed è inferiore per il cerchio più grande. L’interpretazione traslata nel mondo reale è che la pizza più grande ha il costo più vantaggioso. Un altro ragionamento, che mostra anche più chiaramente la classificazione dell’item nella categoria Cambiamento e relazioni, consiste nel dire (esplicitamente o implicitamente) che l’area del cerchio aumenta in proporzione al quadrato del diametro, ossia nella proporzione di (4/3)2, mentre il prezzo aumenta solo nella proporzione di (4/3). Dato che (4/3)2 è maggiore di (4/3), la pizza più grande è più conveniente.

Per risolvere il problema presentato dalla prova Pizze gli studenti devono attingere alle loro capacità matematiche fondamentali a vari livelli. La Comunicazione interviene a un livello relativamente limitato trattandosi di leggere e interpretare il testo piuttosto chiaro del problema, mentre presenta maggiori difficoltà al momento di presentare e illustrare la soluzione. La necessità di matematizzare la situazione è il punto centrale del problema, in particolare la necessità di formulare un modello che integri il concetto di prezzo più conveniente. Per sviluppare la soluzione, lo

studente deve elaborare una rappresentazione degli aspetti pertinenti al problema, inclusa la rappresentazione simbolica della formula per calcolare la superficie, e l'espressione di rapporti che rappresentano il prezzo più conveniente. Le esigenze di ragionamento (decidere che lo spessore può essere ignorato, giustificare l'approccio adottato e il risultato ottenuto) sono significative, e un altro aspetto importante è la capacità di elaborare strategie per controllare i processi di calcolo e modellizzazione. L'utilizzo di un linguaggio simbolico, formale e tecnico e di operazioni è indispensabile considerate le conoscenze concettuali, fattuali e procedurali necessarie per elaborare la geometria del cerchio e il calcolo dei rapporti. L'aspetto utilizzo di strumenti matematici non è particolarmente difficoltoso in quanto lo studente deve usare efficacemente la sua calcolatrice.

In Figura 4.5 viene presentata l'unità *Salita al monte Fuji*, somministrata sempre durante il PISA 2012, con un primo quesito a risposta multipla semplice e, a risposta aperta univoca per il secondo e il terzo; tutti richiedono risposte numeriche. Le domande 1 e 3 chiedono di fare dei calcoli con date e misurazione e di fare conversioni per cui ricadono nella categoria di contenuto Quantità, mentre la domanda 2 ricade nella categoria di contenuto *Cambiamento e relazioni* in quanto il concetto centrale è la velocità: tutte rientrano nella categoria di contesto Sociale, infatti i dati riguardano informazioni relative all'accesso del pubblico al monte Fuji.

SALITA AL MONTE FUJI
Domanda 1 Ogni anno, il monte Fuji è aperto al pubblico solo dal 1° luglio al 27 agosto. Circa 200.000 persone salgono sul monte Fuji durante questo periodo. In media, quante persone salgono sul monte Fuji ogni giorno?
A. 340 B. 710 C. 3 400 D. 7 100

E. 7 400
Domanda 2 Il sentiero Gotemba, che conduce alla cima del monte Fuji, è lungo circa 9 chilometri (km). Gli escursionisti devono essere di ritorno dall'escursione di 18 km entro le 20:00. Toshi stima di poter salire sulla montagna ad una velocità media di 1,5 chilometri all'ora e di scendere raddoppiando questa velocità. Queste velocità tengono già conto delle pause per mangiare e dei momenti di riposo. In base alle velocità stimate da Toshi, a che ora, al più tardi, deve iniziare la sua escursione in modo da poter essere di ritorno per le 20:00?
....
Domanda 3 Durante la sua escursione sul sentiero Gotemba, Toshi porta con sé un podometro per contare i suoi passi. Il suo podometro indica che ha fatto 22.500 passi in salita. Stima la lunghezza media del passo di Toshi durante la salita di 9 chilometri lungo il sentiero Gotemba. Dai la tua risposta in centimetri (cm).In base alle velocità stimate da Toshi, a che ora, al più tardi, deve iniziare la sua escursione in modo da poter essere di ritorno per le 20:00?
Risposta ……. cm

Fig. 4.5: Item della Prova Salita al Monte Fuji (Ciclo Pisa 2012)

Il grado di difficoltà delle tre domande è molto vario dato che la domanda 1 presenta una difficoltà moderata trattandosi di calcolare la media, attraverso una divisione, dopo aver ricavato il numero dei giorni dalle date fornite: l'esigenza di matematizzazione è qui molto ridotta e non a caso ha risposto correttamente il 46% degli studenti. Alla domanda 2 molto più difficile, invece, risponde correttamente solo il 12% degli studenti; la difficoltà non sta solo nel fatto che si tratta di domanda

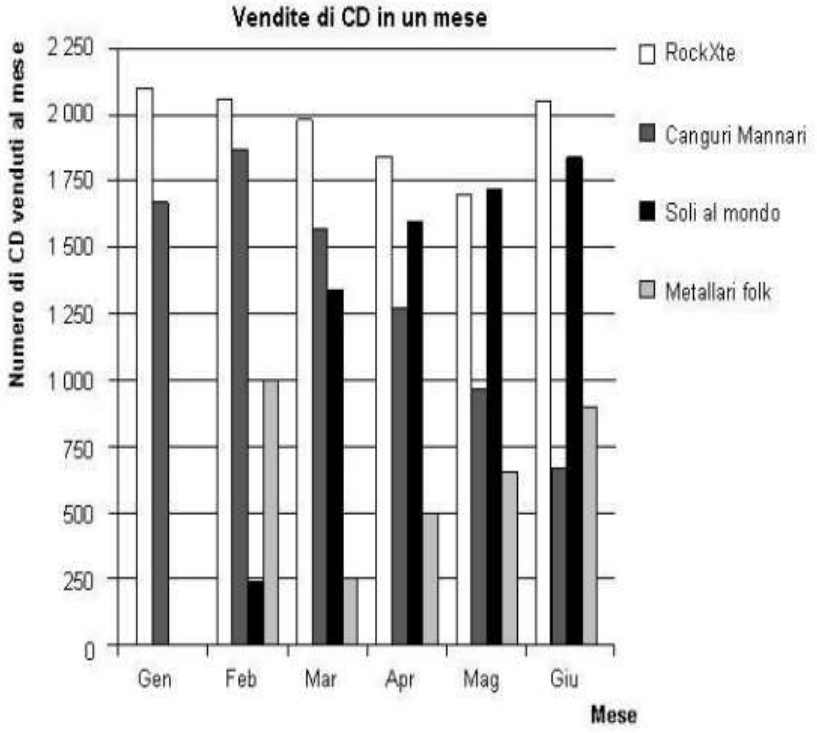
a risposta aperta univoca ma qui per dare la risposta occorreva una elevata esigenza di matematizzazione che a partire dalle velocità medie richiedeva il calcolo delle durate di salita e discesa della montagna, dopo di che occorreva calcolare l'orario di partenza a partire dall'orario di arrivo e la durata totale dell'escursione.

Anche la domanda 3 è difficile. Si tratta principalmente di calcolare la lunghezza media del passo a partire dalla distanza percorsa e dal numero di passi, ed è richiesta la conversione di unità. Per questa domanda, l'11% delle risposte nell'indagine 2012 hanno ottenuto il punteggio pieno per la risposta corretta (40 cm), un altro 4% ha avuto un punteggio parziale per risposte tipo 0,4 (risposta in metri, non cm) o 4000 dove probabilmente è stato utilizzato un errato fattore di conversione metri - centimetri. La strategia richiesta da questa domanda è analoga a quella della domanda 1 – in ambedue i casi si tratta di calcolare una media ma la capacità di ragionamento e argomentazione richiesta è maggiore: la domanda 3 chiede di calcolare la "lunghezza del passo" a partire dalla distanza totale e dal numero di passi. Per collegare queste quantità è necessario un ragionamento maggiore (p. es. collegare la distanza fornita con la lunghezza). Inoltre, anche l'esigenza di matematizzazione è maggiore perchè si tratta di comprendere in che modo la quantità 'lunghezza del passo', pertinente al mondo reale, sia in relazione con le misure generali.

Anche l'unità Classifiche (Figura 4.6) è stata somministrata durante PISA 2012. I tre item dell'unità ricadono tutti nella categoria di contenuto Incertezza e dati, infatti si chiede agli studenti di leggere, interpretare e utilizzare dati matematici presentati in forma grafica. Inoltre ricadono tutti nella categoria di contesto Sociale dato che i dati riguardano informazioni pubbliche sulle vendite di CD, un tipo di dati che si possono normalmente reperire nei giornali, nelle riviste specializzate e online. I primi due quesiti sono esempi della categoria di processo interpretare, applicare e valutare dei risultati matematici; infatti si chiede di interpretare le informazioni matematiche presentate nel grafico in relazione alle caratteristiche del contesto dato; il terzo quesito ricade nella categoria utilizzo di concetti, fatti, procedimenti e ragionamenti matematici perché riguarda l'applicazione di conoscenze procedurali per manipolare la rappresentazione matematica al fine di effettuare un'ulteriore deduzione. I tre quesiti sono tra i più facili somministrati nell'indagine PISA 2012.

Per il quesito 1 la strategia che gli studenti devono utilizzare è reperire nel grafico le informazioni richieste. Quanto alla matematizzazione, si chiede di fare una deduzione sulla situazione delle vendite a partire direttamente dal modello grafico. La competenza tecnica necessaria non va al di là della conoscenza della forma grafica; ed è richiesta solo una deduzione diretta, pertanto l'aspetto ragionamento e argomentazione è minimo. Data la facilità dell'item, l'87% degli studenti ha identificato la risposta corretta, B. Un po' più difficile appare il quesito 2 e, perciò, circa il 78% ha risposto correttamente C: per rispondere correttamente gli studenti devono osservare la relazione tra due serie di dati riportati nel grafico a barre per comprendere i cambiamenti intercorsi durante il periodo visualizzato e riconoscere che la condizione specificata nel quesito si è verificata per la prima volta in aprile. E' l'esigenza di ragionamento e argomentazione che è lievemente maggiore perché nel ragionamento è richiesta una piccola sequenza di passaggi. Il quesito 3 si differenzia dai primi due perché chiede di comprendere una relazione matematica visualizzata nel grafico e quindi di estrapolare tale relazione per predire il valore del mese successivo. Per rispondere si potrebbe per esempio leggere i valori di ogni mese, stimare un ragionevole valore medio del tasso di diminuzione mensile e applicare tale tasso al valore dell'ultimo mese. Si tratta solo di non farsi distrarre dalle serie di dati relative agli altri gruppi. Sicuramente la strategia è chiaramente più complessa rispetto ai primi due quesiti in quanto occorre prendere delle decisioni (utilizzare tutti e cinque i dati da febbraio a giugno oppure basarsi su una media dei cinque mesi, se fare un calcolo esatto, disegnare o visualizzare una curva di tendenza o ricorrere a stime approssimate osservando che ogni mese le vendite calano di poco più di un gradino sull'asse verticale). L'esigenza di matematizzazione comporta qualche calcolo (sottrazione ripetuta di numeri a più cifre, lettura dell'evoluzione scalare tra i punti) che richiede una maggiore capacità di utilizzo di un linguaggio simbolico, formale e tecnico e di operazioni. In ogni caso, anche questo quesito è relativamente facile e che il 76% circa degli studenti ha dato la risposta corretta B.

Classifiche
A gennaio è uscito il nuovo CD dei gruppi RockXte e Canguri Mannari, seguito a febbraio dal CD dei gruppi Soli al mondo e Metallari folk. Il seguente grafico illustra le vendite dei CD di questi gruppi da gennaio a giugno.



Domanda 1
Quanti CD ha venduto il gruppo Metallari folk ad aprile?
A. 250 B. 500 C. 1 000 D. 1 270
Domanda 2
In quale mese il gruppo Soli al mondo ha venduto per la prima volta più CD del gruppo Canguri Mannari?

A. Nessun mese B. Marzo C. Aprile D. Maggio
Domanda 3
Il manager dei Canguri Mannari è preoccupato perché il numero dei CD venduti dal gruppo è diminuito da febbraio a giugno. Quale sarà il volume di vendite stimato del gruppo per il mese di luglio, se continua la stessa tendenza negativa?
A. 70 CDs B. 370 CDs C. 670 CDs D. 1 340 CDs

Fig. 4.6: Item della Prova Classifiche (Ciclo Pisa 2012)

In generale, per costruire il test viene utilizzato un numero uguale di ciascuno di questi format di risposta. Inoltre, le prove PISA di matematica sono costituite da unità che comprendono materiale di stimolo testuale e spesso altre informazioni in forma di tabelle, grafici, mappe o diagrammi, più uno o più item collegati a questo stimolo.

Questo formato permette di coinvolgere gli studenti in un contesto o problema rispondendo a una serie di item correlati. D'altra parte però il modello di misurazione nell'analisi dei dati PISA presuppone l'indipendenza degli item tra di loro per cui, nel caso di unità (i cluster, appunto) che comprendono più di un item, gli sviluppatori dei test cercano di fare in modo che tra di loro vi sia la massima indipendenza possibile.

L'indagine adotta questa struttura per favorire l'uso di contesti il più possibile realistici, tali da riflettere la complessità della realtà, e nel contempo sfruttare al meglio la durata del test. È tuttavia importante garantire un'adeguata varietà di contesti per limitare al massimo che la scelta di un contesto possa essere pregiudizievole e rendere l'item il più indipendente possibile. Gli sviluppatori cercano dunque di trovare l'equilibrio tra queste due esigenze contrastanti.

Gli item selezionati per le prove dell'indagine devono presentare un'ampia gamma di difficoltà per corrispondere alle diverse capacità degli studenti partecipanti. Inoltre, per quanto possibile, tutte le principali categorie della rilevazione (categorie dei contenuti, dei processi e dei contesti) sono rappresentate da item che coprono l'intera gamma delle difficoltà. I gradi di difficoltà sono determinati, tra le altre proprietà che sono misurate, nel quadro di una prova sul campo condotta prima della selezione degli item per l'indagine principale PISA. Per essere inclusi nelle prove dell'indagine PISA gli item sono selezionati in base alla loro corrispondenza al quadro di riferimento e alle loro proprietà di misurazione.

I risultati derivano dai punteggi raggiunti, e, raggiunta una soglia minima, identificano 6 fasce di livello di literacy:

— *Livello 6*: gli studenti sono in grado di concettualizzare, generalizzare e utilizzare informazioni sulla base delle loro proprie ricerche e della modellizzazione di situazioni problematiche complesse. Sanno mettere in relazione diverse fonti di informazione e rappresentazioni muovendosi al loro interno senza difficoltà. Possono fare riflessioni e ragionamenti matematici difficili. Sanno applicare la loro comprensione e intuizione con una padronanza delle operazioni e relazioni matematiche simboliche e formali che permette loro di elaborare approcci e strategie di attacco in presenza di situazioni mai incontrate prima. A questo livello, gli studenti sono in grado di formulare e comunicare con precisione le loro azioni e riflessioni in relazione ai loro risultati, interpretazioni, argomentazioni e alla loro pertinenza rispetto alle situazioni iniziali.

— *Livello 5*: gli studenti possono mettere a punto e utilizzare modelli per situazioni complesse, identificando i vincoli e specificando i presupposti. Sanno selezionare, raffrontare e valutare le strategie appropriate alla soluzione di problemi complessi in relazione a tali modelli. Sono in condizione di affrontare situazioni da un'angolazione strategica, ricorrendo a competenze ben sviluppate di ragionamento e riflessione, alle relative rappresentazioni, caratterizzazioni simboliche e formali con una comprensione approfondita di tali situazioni. Riflettono sulle loro azioni e sanno formulare e comunicare le loro interpretazioni e il percorso seguito

nel ragionamento.

— *Livello 4*: gli studenti sanno lavorare efficacemente con modelli espliciti di complesse situazioni concrete che possono comportare vincoli e richiedere deduzioni. Possono selezionare e integrare rappresentazioni di tipo diverso, anche simboliche, collegandole direttamente a situazioni del mondo reale. A questo livello, in questi contesti, gli studenti sono in grado di utilizzare competenze ben sviluppate e flessibilità di ragionamento, con un certo grado di profondità di comprensione. Possono elaborare ed esprimere argomentazioni e spiegazioni delle loro interpretazioni e azioni.

— *Livello 3*: gli studenti sono in grado di seguire procedure chiaramente descritte, comprese procedure che richiedono decisioni in sequenza. Sanno selezionare e applicare semplici strategie per risolvere problemi. A questo livello possono interpretare e utilizzare rappresentazioni a partire da fonti di informazione diverse e costruire un ragionamento su questa base. Sono in grado di elaborare comunicazioni succinte per presentare i loro risultati, interpretazioni e ragionamenti.

— *Livello 2*: gli studenti sono in grado di interpretare e riconoscere situazioni in contesti che richiedono al massimo deduzioni dirette. Possono ricavare informazioni pertinenti da un'unica fonte e utilizzare una sola modalità di rappresentazione. Sono in grado di utilizzare algoritmi, formule, procedure o convenzioni elementari. Possono fare un ragionamento diretto e fornire un'interpretazione letterale dei loro risultati.

— *Livello 1*: gli studenti sanno rispondere a domande inserite in un contesto familiare dove tutte le informazioni sono esplicite e ciò che si chiede loro è chiaramente definito. Sono in grado di identificare informazioni ed eseguire procedure di routine seguendo istruzioni dirette in situazioni esplicite. Possono eseguire azioni ovvie derivanti direttamente dallo stimolo somministrato.

4.6 Un confronto docimologico tra le prove INVALSI e OCSE PISA

In ambito docimologico, il paragone tra le prove INVALSI e quelle OCSE PISA in termini valutativi è argomento di discussione frequente.
La difformità delle prove, tranne per ciò che riguarda la strutturazione, è netta per quanto riguarda scopi e finalità. Entrambe le tipologie risultano fallaci nel definire il livello di competenza raggiunto dagli alunni.
Per ciò che attiene alle prove INVALSI, esse, operano come da QdR nel campo della verifica delle conoscenze e delle abilità. Le OCSE PISA, seppure di formulazione lodevole nell'identificazione e scomposizione dei quesiti in termini di contesti calati nella realtà e fasi strategiche di risoluzione, operano anch'esse come una misura statica di un concetto mutevole e multiforme come la competenza.
Il punto è che entrambe le tipologie esulano dalla valutazione formativa così com'è stata definita. La valutazione formativa, attraverso il suo percorso temporale, pare essere l'unico modo per intercettare e definire il livello di competenza raggiunto dai discenti, ed essa richiede per sua natura una *prossimità* tra docente e allievo, in modo che quest'ultimo possa essere osservato ai fini della valutazione.
Le prove OCSE PISA, inoltre, rivelano il loro "peccato originale" nella partizione delle prove tra i domini linguistici e scientifici, il che fa venire meno quella concezione olistica del sapere che non può fare a meno dell'interdisciplinarietà.
L'unico strumento che risulta idoneo ad accertare il livello di competenza resta quello dell'Unità di Apprendimento, poiché essa è progettata con un arco temporale che non si esaurisce nello spazio di una prova ma fa riferimento ad un monte ore specifico, in grado di favorire l'*osservabilità in movimento* tipica dell'idea di competenza, secondo la multidimensione propria di un'unità tra materie.
Una prova standardizzata come sono quelle dell'INVALSI o dell'OCSE PISA può essere *parte*, in un momento diagnostico, intermedio o finale di un percorso, di questo processo di valutazione per competenze, ma certo non può esaurirlo. La valutazione per competenze infatti deve passare per una fase ideativa, che consiste nell'identificazione e scelta degli obiettivi formativi unitari, una fase di attuazione e sviluppo dei percorsi di metodo e di contenuto e una fase di verifica, controllo e documentazione (Mazzeo, 2005).

Con questo non si vuole sminuire la natura delle indagini INVALSI e OCSE PISA, ma esse si limitano a "fotografare" il livello di acquisizione di conoscenze e applicazione delle stesse in un determinato istante. Non potrebbe, in effetti, essere altrimenti: essendo prove elaborate all'esterno del contesto di ciascuna scuola, con destinatari estremamente eterogenei, non sarebbe possibile formulare un percorso di apprendimento che evidenzi le competenze di ciascuno.
Sia le indagini INVALSI che PISA offrono tuttavia grandissimi spunti a livello di dati e informazioni statistiche sui sistemi educativi. Esse consentono di ottenere, in particolare:

- *indicatori di base* che consentano di costruire un profilo essenziale delle conoscenze e delle abilità degli studenti;
- *indicatori di contesto* che mostrino come conoscenze e abilità siano in rapporto con importanti variabili di carattere demografico e socio-economico riguardanti il sistema educativo;
- *indicatori di tendenza*, derivanti dal carattere ciclico della raccolta dati, che mettano in luce i cambiamenti sia nel livello e nella distribuzione dei risultati, sia nelle relazioni che intercorrono fra tali risultati e le variabili di contesto relative tanto agli studenti quanto alle scuole.

Le prove standardizzate esterne OCSE PISA e INVALSI risultano, come detto, essere differenti sia per scopi valutativi, ma i loro risultati hanno come conseguenza comune una ampia e condizionante ricaduta sulle politiche scolastiche dei diversi paesi, con l'obiettivo del miglioramento di tali sistemi ma con non poche problematiche interpretative e decisionali.
Un equivoco di fondo implicito sta nella stessa parola *valutazione*, che può significare sia la valutazione del sistema sia la valutazione degli allievi o anche la valutazione degli operatori scolastici. Una delle principali fonti di preoccupazione consiste nel fatto che vi sono differenze di contesto in cui ogni docente opera, e differenze di contesto per quanto riguarda la provenienza di ogni allievo: dal che si teme che queste prove non tengano nel dovuto conto la storia e le difficoltà specifiche dei singoli studenti.

Nel nostro Paese, le prove INVALSI hanno suscitato molta attenzione soprattutto in relazione agli esiti. I timori sono legati principalmente al fatto che i risultati di queste prove possano essere usati per valutare i docenti o una singola istituzione scolastica nel suo insieme.

In particolare, la gran parte del corpo docente vede queste prove calate dall'esterno come un'attività lontana dalla didattica quotidiana svolta in classe e canalizzata a valutare il proprio operato. Inoltre un eventuale responso negativo degli allievi viene vissuto come un fallimento globale dell'azione didattica svolta, anziché come occasione per una riflessione in grado di suggerire interventi mirati.

Tornando a un raffronto tra prove INVALSI e OCSE PISA in riferimento alla seconda classe della Scuola Secondaria di Secondo Grado, è necessario innanzitutto analizzare le somiglianze e le differenze dei due quadri di riferimento per la matematica.

L'articolazione dei contenuti in ambiti è ormai condivisa a livello internazionale ed è interessante osservare il sostanziale parallelismo fra le scelte operate dall'Italia a partire dai documenti programmatici e le scelte operate a livello internazionale.

Per quanto riguarda gli aspetti di tipo cognitivo, non esiste per essi un parallelismo come quello presente per i contenuti in quanto le finalità delle rilevazioni sono diverse: quello di PISA si basa sulle capacità e non è legato, per definizione, al curricolo, mentre il quadro di riferimento INVALSI è strettamente connesso alle Indicazioni Nazionali e alle Linee Guida. Tuttavia, come si evince dalla tabella di confronto sui contenuti[16] (Fig. 4.7), fra i due quadri c'è una chiara corrispondenza, come è naturale visto che i contenuti fanno riferimento alle stesse discipline: Aritmetica, Geometria, Algebra, Statistica e Probabilità.

[16] Tabella tratta dal Quadro di Riferimento delle prove INVALSI di Matematica Documento pubblicato il 30.08.2018 (https://invalsi-areaprove.cineca.it/docs/file/QdR_MATEMATICA.pdf)

ARTICOLAZIONE DEI CONTENUTI	
OCSE PISA	**INVALSI**
Quantità	Numeri
Spazio e forma	Spazio e figure
Cambiamento e relazioni	Relazioni e funzioni
Incertezza e dati	Dati e previsioni

Fig. 4.7: Articolazione dei contenuti in ambiti

La differenza nei nomi indica anche una scelta di fondo diversa. Per il Quadro di Riferimento INVALSI, così come nelle Indicazioni Nazionali, si fa esplicito riferimento agli oggetti di cui tratta la disciplina (ad esempio i numeri sono gli oggetti di cui tratta l'Aritmetica) per sottolineare che è attraverso lo studio di questi oggetti che si costruisce l'impianto disciplinare. Le categorie utilizzate dal PISA, coerentemente con la definizione di mathematical literacy, mettono in evidenza il ruolo che questi contenuti hanno nella risoluzione di problemi reali. Ad esempio la categoria *Quantità* sta ad indicare l'ambito di contenuto dove intervengono elementi di quantificazione in problemi contestualizzati: ciò comprende la quantificazione di attributi di oggetti, relazioni, situazioni ed entità reali, la comprensione di varie modalità di rappresentazione di tali quantificazioni, e la capacità di giudicare interpretazioni e argomentazioni basate sulla quantità attraverso misurazioni, conteggi, grandezze, unità, indicatori, dimensioni relative, tendenze e modelli numerici.

La differenza più profonda la si rinviene in relazione ai processi: i processi PISA sono strettamente collegati al ciclo della matematizzazione, mentre i processi presenti nel Quadro di Riferimento INVALSI sono intesi come i processi che gli studenti dovrebbero attivare nella risoluzione dei quesiti. In questo senso, tuttavia, negli anni, c'è stato un avvicinamento nella logica di fondo tra le prove INVALSI e PISA attraverso l'identificazione dei 3 macro-processi coinvolti nello svolgimento delle prove, intesi anche per INVALSI nel *Formulare*, *Utilizzare* e *Interpretare*.

Tale avvicinamento è avvenuto poiché uno degli obiettivi fondamentali per i discenti, esplicitato nelle indicazioni di legge di tutti i livelli scolastici, è l'acquisizione della capacità di utilizzare la matematica per leggere e rappresentare la realtà, nonché ovviamente degli strumenti matematici necessari per effettuare questa matematizzazione e ricavarne dei risultati da interpretare nel contesto di partenza. Questa operazione di matematizzazione viene abitualmente schematizzata, per l'appunto, nelle tre fasi ormai note:

- *formulare*: il passaggio dalla situazione di problema reale al modello matematico;
- *utilizzare*: il lavoro sul modello matematico;
- *interpretare*: comprendere i risultati rispetto alla situazione di partenza.

Per le rilevazioni INVALSI, dunque, le domande sono state progressivamente costruite anche con una specifica attenzione alla fase della matematizzazione, che viene più specificatamente coinvolta. Ogni domanda ha quindi un'ulteriore etichettatura, trasversale ai processi tradizionalmente usati per costruire le prove, che permette agli insegnanti di avere un nuovo importante "taglio di lettura" dei propri risultati, coerente con gli obiettivi fondamentali delineati dalle indicazioni di legge.

Nel *Formulare*, ad esempio, sono aggregati i risultati di tutte quelle domande in cui all'allievo è richiesto di descrivere con uno strumento matematico (un'equazione, una operazione, una tabella, un grafico, un diagramma, etc.), un problema o una situazione. Nell'*Utilizzare* sono aggregati i risultati delle domande in cui il processo richiesto all'allievo è interno alla matematica (trovare il risultato di una operazione, risolvere un'equazione, etc.).

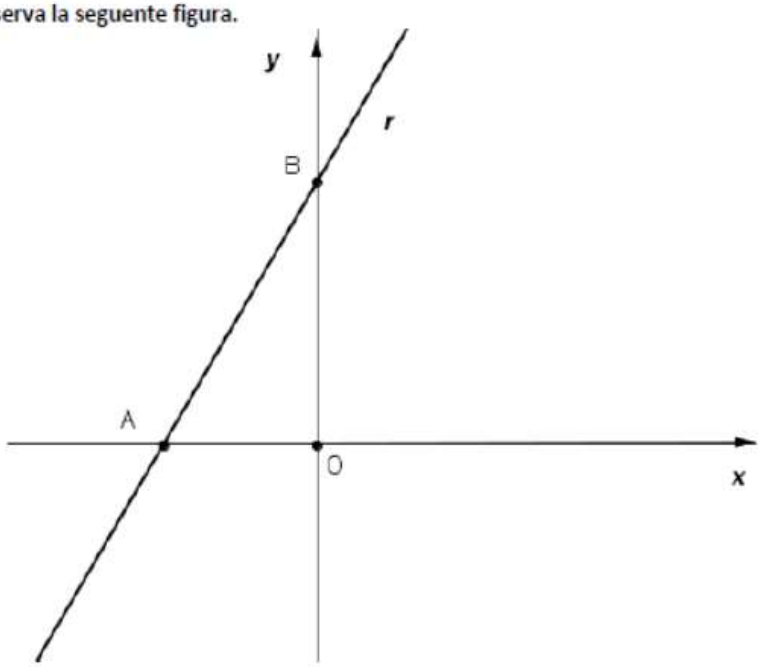
Nell'*Interpretare* infine sono aggregati i risultati delle domande in cui l'allievo deve leggere e interpretare i risultati delle procedure matematiche implementate o descritte, nel particolare contesto di un problema. Questa ulteriore categorizzazione consente anche un confronto con i risultati PISA che potrebbe essere interessante, soprattutto dal punto di vista didattico. Inoltre, è interessante osservare che nelle prove INVALSI ci sono domande che potremmo definire *simil-PISA* e sono quelle

legate alla modellizzazione matematica di fenomeni naturali, fisici e sociali, mentre ci sono altre domande che difficilmente potremmo trovare nella rilevazione PISA e sono quelle relative ad un contesto intra-matematico. Una ulteriore differenza è che le domande PISA sono caratterizzate da uno stimolo e da una serie di domande relative a quella precisa situazione problematica: le domande aperte a risposta articolata, nelle quali si richiede agli studenti di spiegare le loro scelte o strategie, sono in numero notevolmente maggiore rispetto alle prove INVALSI.

Sintetizzando, PISA è basata su un più ampio set di quesiti a rotazione proposti ai diversi singoli partecipanti, e si svolge in condizioni maggiormente controllate e con un maggior numero di domande aperte, grazie alla presenza di somministratori appositamente retribuiti; INVALSI è basata su un più ristretto set di quesiti egualmente posti a tutti i singoli partecipanti, con un minor numero di domande aperte e controllori esterni solo in sottoinsieme di classi.

Un esempio significativo della differenza negli item tra PISA e INVALSI è rinvenibile nel seguente quesito del 2013 (Figura 4.8) riferito alla seconda classe della Scuola Secondaria di Secondo Grado:

D21. Osserva la seguente figura.



Le coordinate di A sono (– 3; 0) e l'area del triangolo AOB è 9.
Quale fra le seguenti equazioni rappresenta la retta *r*?

A. ☐ $y = 2x + 6$

B. ☐ $y = -2x - 6$

C. ☐ $y = 3x + 9$

D. ☐ $y = -3x - 9$

Fig. 4.8: Quesito INVALSI 2013

La descrizione del quesito secondo il Quadro di Riferimento INVALSI (dalla relativa guida alla lettura) è la seguente[17]:

- *Ambito*: Spazio e figure
- *Scopo della domanda*: Individuare le coordinate di un punto e riconoscerne l'appartenenza a una retta.
- *Processo*: Conoscere e padroneggiare i contenuti specifici della Matematica.
- *Macro-processo*: Utilizzare

17 http://www.invalsi.it/snvpn2013/documenti/strumenti/2013_II_sec_secondo_grado_guida_matematica.pdf

- *Indicazioni Nazionali e Linee Guida*: Il metodo delle coordinate: il piano cartesiano

Gli studenti che conoscono il significato grafico-geometrico del termine q nell'equazione: $y = mx + q$ possono scartare immediatamente le opzioni B e D. Una verifica numerica porta a scartare il caso in cui il punto B possa avere ordinata 9 o a verificare la correttezza dell'ipotesi che il punto B abbia ordinata 6.
La domanda è tipicamente legata ai curricola, e questo emerge anche dall'analisi dei risultati per tipologia di scuola (Licei 36,9% di risposte corrette, Tecnici 24,5% e Istruzione Professionale 18,6%). Risulta mediamente difficile (indice di difficoltà 1,10). La categoria di macro-processo è *Utilizzare*, in quanto il processo è interno al mondo matematico. Per la definizione di literacy matematica del Quadro di Riferimento PISA una domanda di questo genere non potrebbe essere inserita in quanto non riferita a nessun contesto reale.

4.7 I risultati delle prove INVALSI e OCSE PISA

Alla data attuale, i dati disponibili più recenti e completi relativi alle prove Invalsi delle classi seconde della Secondaria di II Grado sono quelli relativi al 2019. Nel 2020 le prove sono state annullate a causa della pandemia da COVID-19, mentre nel 2021 si è scelto di esonerare le classi seconde dalle prove. Rispetto alle prove somministrate nel 2022 sono stati pubblicati alcuni rapporti che, *a colpo d'occhio*, forniscono una prima disamina dei risultati.
Negli anni, i descrittori dei livelli sintetici di apprendimento nella matematica si sono progressivamente sovrapposti a quelli dell'indagine OCSE PISA. I descrittori per il grado 10[18] (II classe Secondaria di Secondo Grado), introdotti dall'INVALSI nel 2018, sono i seguenti:

Descrizione del livello
Matematica – Classe II scuola secondaria di secondo grado

[18] Fonte: INVALSI CINECA: https://bit.ly/3LgzhLc

- L’esito conseguito dall’allievo/a nella prova non consente l’attestazione del raggiungimento del livello 1.
- *Livello 1*. L’allievo/a utilizza conoscenze elementari e abilità di base prevalentemente acquisite nei gradi scolari precedenti. Risponde a domande formulate in maniera semplice, relative a situazioni scolastiche abituali (per esempio riguardanti l’individuazione e la lettura di dati rappresentati in diverse forme).
- *Livello 2*. L’allievo/a conosce le principali nozioni di base previste dalle Linee guida e dalle Indicazioni nazionali di matematica per il primo biennio della scuola secondaria di secondo grado ed esegue procedimenti di calcolo e procedure elementari. Risolve problemi in contesti reali che richiedono l'uso di conoscenze matematiche possedute fin dai gradi scolari precedenti. Effettua semplici elaborazioni su diverse rappresentazioni di dati.
- *Livello 3*. L'allievo/a utilizza le abilità di base acquisite nel primo biennio della scuola secondaria di secondo grado e collega tra loro le conoscenze fondamentali. Risponde a domande che richiedono semplici ragionamenti a partire dalle informazioni e dai dati forniti. Identifica elementi e proprietà dei principali oggetti matematici (per esempio figure geometriche e grafici). Riconosce diverse rappresentazioni di un oggetto matematico (per esempio numeri decimali, frazioni e percentuali).
- *Livello 4*. L’allievo/a conosce, anche in casi non abituali, i principali oggetti matematici (per esempio equazioni) incontrati nel primo biennio della scuola secondaria di secondo grado e utilizza con efficacia le conoscenze apprese. Interpreta dati collegando fatti e utilizzando diverse rappresentazioni in contesti differenti. Costruisce un modello con il quale operare, utilizzando anche il linguaggio simbolico proprio della matematica. Riconosce, fra diverse argomentazioni proposte, quella pertinente all’affermazione da sostenere.
- *Livello 5*. L’allievo/a utilizza con sicurezza gli aspetti concettuali e procedurali degli argomenti più importanti proposti nelle Linee guida e nelle Indicazioni nazionali di matematica per il primo biennio della scuola secondaria di secondo grado. Risponde a domande che richiamano

situazioni non ordinarie e complesse per le quali è necessario costruirsi un modello adeguato e interpretare informazioni, attivando strategie e ragionamenti. Utilizza diverse rappresentazioni degli oggetti matematici e passa con sicurezza da una all'altra. Nel processo di risoluzione di un problema coglie relazioni anche non esplicite tra i dati disponibili. Produce argomentazioni pertinenti alle affermazioni da sostenere utilizzando un linguaggio adeguato al grado scolare.

Risulta molto complicato procedere a una comparazione diacronica dei risultati delle prove Invalsi di Matematica nel tempo, poiché i criteri di valutazione sono stati spesso rivisti e ciò ha impedito di sviluppare una serie storica coerente rispetto agli esiti raggiunti a livello nazionale. Gli studi dei risultati INVALSI, riportati nei rapporti annuali di riferimento[19], evidenziano, infatti, un'attenzione particolare alla dimensione sincronica della prova, mettendo a raffronto innanzitutto quanto emerge in termini di difformità tra le macroaree geografiche del Paese e tra i diversi indirizzi scolastici superiori. Dai rapporti annuali pubblicati emerge che il sistema scolastico italiano non è uniforme: l'offerta formativa cambia da regione a regione, con grandissime variabilità di rendimento tra le aree del Nord-Est – le migliori – e quelle del Sud e delle Isole – in forte ritardo.

Negli anni 2018 e 2019, l'introduzione dei livelli sopracitati ha permesso una ricognizione generale del livello di apprendimento fotografato dalle prove: con rispettivamente il 58% e il 62% degli alunni che è riuscito a raggiungere punteggio da Livello 3 o superiore – seppure permane un'altissima deviazione standard degli esiti a livello territoriale il che, in uno scenario della formazione di carattere ormai europeo, è fortemente allarmante.

Un ulteriore dato significativo che risulta dai rapporti, esulando dal singolo Grado 10 ma guardando al sistema globalmente, è il consolidamento delle difficoltà matematiche con il crescere dell'età del singolo discente sia in termini di divario territoriale, il che mostra un accumularsi delle lacune che diviene via via più complesso da gestire.

[19] https://invalsi-areaprove.cineca.it/index.php?get=static&pag=rapporti_invalsi

Per ciò che riguarda i risultati delle prove OCSE PISA, l'andamento temporale è ben analizzato dai rapporti di valutazioni per ciascuno dei Paesi che ha preso parte alle indagini.

Nell'ultima prova PISA del 2018, gli studenti italiani hanno ottenuto un punteggio medio in matematica in linea con quello della media dei Paesi OCSE (487 vs. 489): secondo il relativo rapporto OCSE[20], tale punteggio medio è risultato simile a quello di: Portogallo, Australia, Federazione Russa, Repubblica Slovacca, Lussemburgo, Spagna, Georgia, Ungheria e Stati Uniti. I dati globali dei 78 Paesi partecipanti sono evidenziati in Figura 4.9:

[20] https://www.oecd.org/pisa/publications/pisa-2018-results.htm

Statisticamente superiore alla media OCSE

Non statisticamente diverso dalla media OCSE

Statisticamente inferiore alla media OCSE

Punteggio medio	Paesi o economie di riferimento	Paesi o economie il cui punteggio medio non è statisticamente diverso da quello del paese/economia di riferimento
591	B-S-J-Z (Cina)	
569	Singapore	
558	Macao (Cina)	Hong Kong (Cina)[1]
551	Hong Kong (Cina)[1]	Macao (Cina)
531	Taipei Cinese	Giappone, Corea
527	Giappone	Taipei Cinese, Corea, Estonia
526	Corea	Taipei Cinese, Giappone, Estonia, Paesi Bassi[1]
523	Estonia	Giappone, Corea, Paesi Bassi[1]
519	Paesi Bassi[1]	Corea, Estonia, Polonia, Svizzera
516	Polonia	Paesi Bassi[1], Svizzera, Canada
515	Svizzera	Paesi Bassi1, Polonia, Canada, Danimarca
512	Canada	Polonia, Svizzera, Danimarca, Slovenia, Belgio, Finlandia
509	Danimarca	Svizzera, Canada, Slovenia, Belgio, Finlandia
509	Slovenia	Canada, Danimarca, Belgio, Finlandia
508	Belgio	Canada, Danimarca, Slovenia, Finlandia, Svezia, Regno Unito
507	Finlandia	Canada, Danimarca, Slovenia, Belgio, Svezia, Regno Unito
502	Svezia	Belgio, Finlandia, Regno Unito, Norvegia, Germania, Irlanda, Repubblica Ceca, Austria, Lettonia
502	Regno Unito	Belgio, Finlandia, Svezia, Norvegia, Germania, Irlanda, Repubblica Ceca, Austria, Lettonia, Francia
501	Norvegia	Svezia, Regno Unito, Germania, Irlanda, Repubblica Ceca, Austria, Lettonia, Francia, Islanda
500	Germania	Svezia, Regno Unito, Norvegia, Irlanda, Repubblica Ceca, Austria, Lettonia, Francia, Islanda, Nuova Zelanda
500	Irlanda	Svezia, Regno Unito, Norvegia, Germania, Repubblica Ceca, Austria, Lettonia, Francia, Islanda, Nuova Zelanda
499	Repubblica Ceca	Svezia, Regno Unito, Norvegia, Germania, Irlanda, Austria, Lettonia, Francia, Islanda, Nuova Zelanda, Portogallo[1]
499	Austria	Svezia, Regno Unito, Norvegia, Germania, Irlanda, Repubblica Ceca, Lettonia, Francia, Islanda, Nuova Zelanda, Portogallo[1]
496	Lettonia	Svezia, Regno Unito, Norvegia, Germania, Irlanda, Repubblica Ceca, Austria, Francia, Islanda, Nuova Zelanda, Portogallo[1], Australia
495	Francia	Regno Unito, Norvegia, Germania, Irlanda, Repubblica Ceca, Austria, Lettonia, Islanda, Nuova Zelanda, Portogallo[1], Australia
495	Islanda	Norvegia, Germania, Irlanda, Repubblica Ceca, Austria, Lettonia, Francia, Nuova Zelanda, Portogallo[1], Australia
494	Nuova Zelanda	Germania, Irlanda, Repubblica Ceca, Austria, Lettonia, Francia, Islanda, Portogallo[1], Australia
492	Portogallo	Repubblica Ceca, Austria, Lettonia, Francia, Islanda, Nuova Zelanda, Australia, Russia, Italia, Repubblica Slovacca
491	Australia	Lettonia, Francia, Islanda, Nuova Zelanda, Portogallo[1], Russia, Italia, Repubblica Slovacca
488	Russia	Portogallo[1], Australia, Italia, Repubblica Slovacca, Lussemburgo, Spagna, Lituania, Ungheria
487	Italia	Portogallo[1], Australia, Russia, Repubblica Slovacca, Lussemburgo, Spagna, Lituania, Ungheria, Stati Uniti[1]
486	Repubblica Slovacca	Portogallo[1], Australia, Russia, Italia, Lussemburgo, Spagna, Lituania, Ungheria, Stati Uniti[1]
483	Lussemburgo	Russia, Italia, Repubblica Slovacca, Spagna, Lituania, Ungheria, Stati Uniti[1]
481	Spagna	Russia, Italia, Repubblica Slovacca, Lussemburgo, Lituania, Ungheria, Stati Uniti[1]
481	Lituania	Russia, Italia, Repubblica Slovacca, Lussemburgo, Spagna, Ungheria, Stati Uniti[1]
481	Ungheria	Russia, Italia, Repubblica Slovacca, Lussemburgo, Spagna, Lituania, Stati Uniti[1]
478	Stati Uniti[1]	Italia, Repubblica Slovacca, Lussemburgo, Spagna, Lituania, Ungheria, Bielorussia, Malta
472	Bielorussia	Stati Uniti[1], Malta
472	Malta	Stati Uniti[1], Bielorussia
464	Croazia	Israele
463	Israele	Croazia
454	Turchia	Ucraina, Grecia, Cipro[2], Serbia
453	Ucraina	Turchia, Grecia, Cipro[2], Serbia
451	Grecia	Turchia, Ucraina, Cipro[2], Serbia
451	Cipro[2]	Turchia, Ucraina, Grecia, Serbia
448	Serbia	Turchia, Ucraina, Grecia, Cipro[2], Malesia
440	Malesia	Serbia, Albania, Bulgaria, Emirati Arabi Uniti, Romania
437	Albania	Malesia, Bulgaria, Emirati Arabi Uniti, Romania
436	Bulgaria	Malesia, Albania, Emirati Arabi Uniti, Brunei, Romania, Montenegro
435	Emirati Arabi Uniti	Malesia, Albania, Bulgaria, Romenia
430	Brunei	Bulgaria, Romania, Montenegro
430	Romania	Malesia, Albania, Bulgaria, Emirati Arabi Uniti, Brunei, Montenegro, Kazakistan, Moldavia, Baku (Azerbaigian), Thailandia
430	Montenegro	Bulgaria, Brunei, Romania
423	Kazakistan	Romania, Moldavia, Baku (Azerbaigian), Thailandia, Uruguay, Cile
421	Moldavia	Romania, Kazakistan, Baku (Azerbaigian), Thailandia, Uruguay, Cile
420	Baku (Azerbaigian)	Romania, Kazakistan, Moldavia, Thailandia, Uruguay, Cile, Qatar
419	Thailandia	Romania, Kazakistan, Moldavia, Baku (Azerbaigian), Uruguay, Cile, Qatar
418	Uruguay	Kazakistan, Moldavia, Baku (Azerbaigian), Thailandia, Cile, Qatar
417	Cile	Kazakistan, Moldavia, Baku (Azerbaigian), Thailandia, Uruguay, Qatar
414	Qatar	Baku (Azerbaigian), Thailandia, Uruguay, Cile, Messico
409	Messico	Qatar, Bosnia e Erzegovina, Costa Rica
406	Bosnia e Erzegovina	Messico, Costa Rica, Perù, Giordania
402	Costa Rica	Messico, Bosnia e Erzegovina, Perù, Giordania, Georgia, Libano
400	Perù	Bosnia e Erzegovina, Costa Rica, Giordania, Georgia, Macedonia del Nord, Libano
400	Giordania	Bosnia e Erzegovina, Costa Rica, Perù, Georgia, Macedonia del Nord, Libano
398	Georgia	Costa Rica, Perù, Giordania, Macedonia del Nord, Libano, Colombia
394	Macedonia del Nord	Perù, Giordania, Georgia, Libano, Colombia
393	Libano	Costa Rica, Perù, Giordania, Georgia, Macedonia del Nord, Colombia
391	Colombia	Georgia, Macedonia del Nord, Libano
384	Brasile	Argentina, Indonesia
379	Argentina	Brasile, Indonesia, Arabia Saudita
379	Indonesia	Brasile, Argentina, Arabia Saudita
373	Arabia Saudita	Argentina, Indonesia, Marocco
368	Marocco	Arabia Saudita, Kosovo
366	Kosovo	Marocco
353	Panama	Filippine
353	Filippine	Panama
325	Repubblica Dominicana	

Fig. 4.9: Panoramica internazionale dei punteggi delle prove OCSE PISA

Nel nostro Paese, la distanza che separa gli studenti più bravi da quelli in difficoltà è di 242 punti. Se guardiamo questa differenza in termini di livelli di competenza, gli studenti più bravi si collocano a Livello 5, mentre quelli meno bravi a Livello 1. Circa il 24% dei nostri studenti quindicenni non ha raggiunto il livello base di competenza (Livello 2), mentre poco meno del 10% si colloca nei livelli di eccellenza. Questo risultato è in linea con la media internazionale. In generale, i risultati sui vari livelli, anche in relazione alle aree geografiche, sono stati così distribuiti (fig. 4.10):

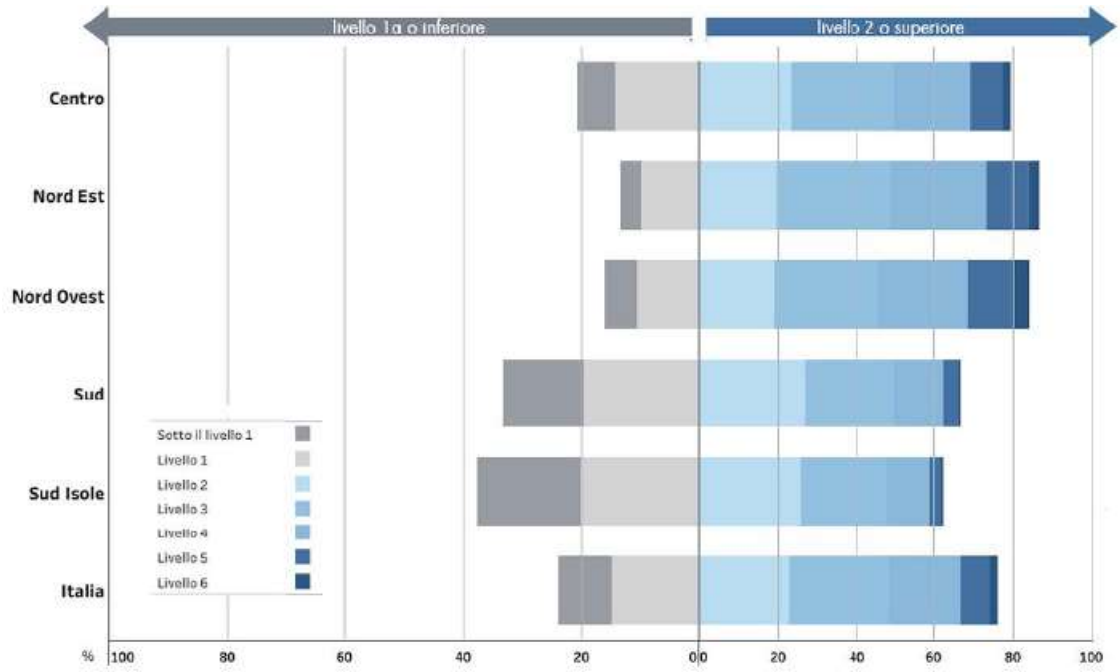


Fig. 4.10: Risultati OCSE PISA in Italia per livelli e macroaree geografiche

Per quanto riguarda la fluttuazione dei risultati delle prove OCSE PISA, di seguito viene evidenziata la stessa – sempre per macroaree geografiche italiane (fig 4.11):

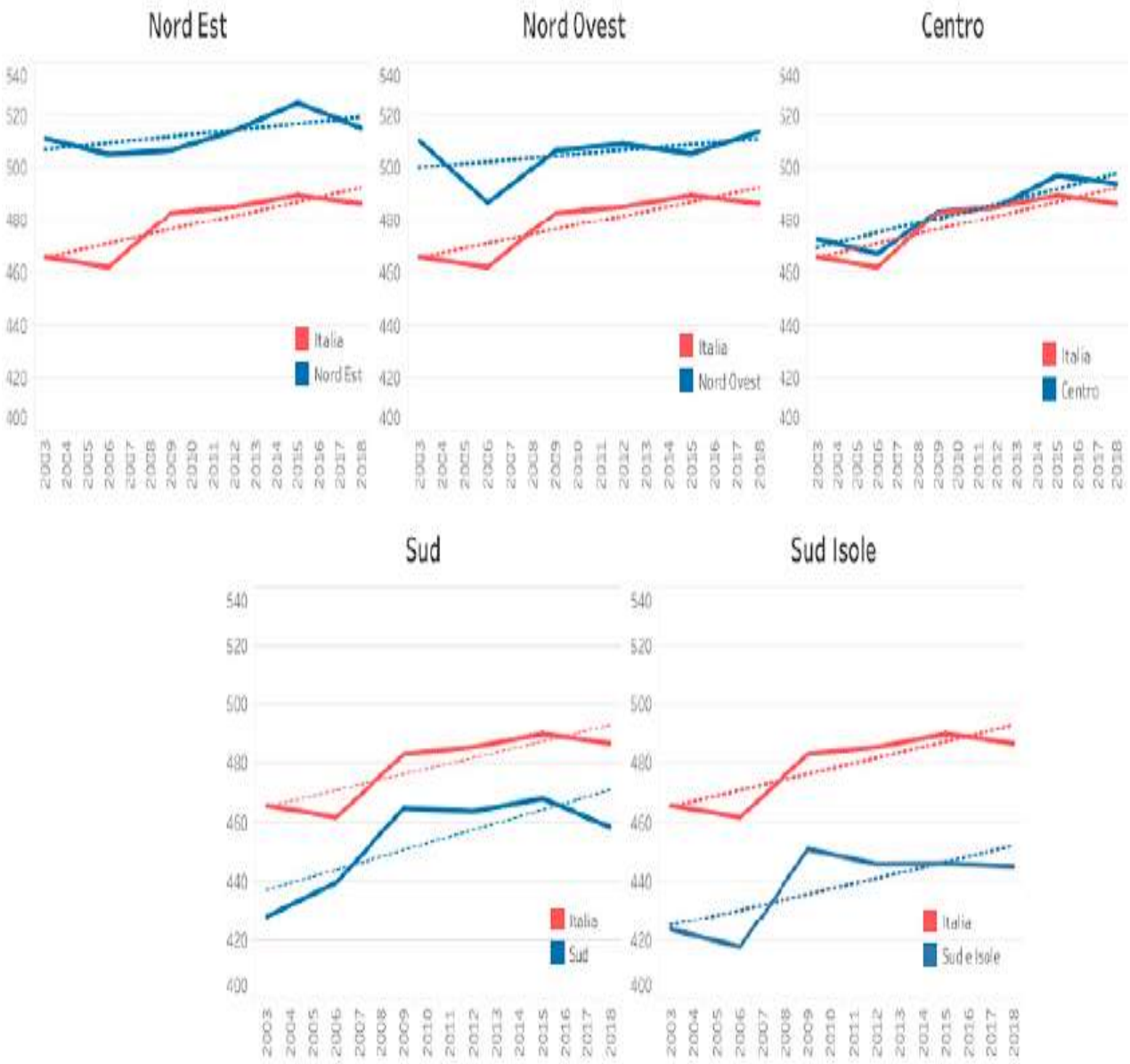


Fig. 4.11: Risultati OCSE PISA in Italia dal 2003 al 2018

È possibile dunque leggere i dati come segue:

- *Dal 2009 a oggi l'andamento dei risultati PISA in matematica è costante*. Rispetto ai cicli PISA precedenti, la rilevazione del 2018 ha mostrato un miglioramento solo in confronto al 2003 (+21 punti) e al 2006 (+25 punti). Dal ciclo 2009 al più recente del 2015, nel 2018 non si sono registrati

cambiamenti significativi. Ragionando sul lungo periodo, dal 2003 a oggi, il punteggio in matematica aumenta in media di 5 punti ogni tre anni.

Il miglioramento rispetto al 2003 e al 2006 sembrerebbe dovuto a una contemporanea diminuzione degli studenti che non raggiungono il livello minimo di competenza, e a un aumento della percentuale di studenti nei livelli di eccellenza. Dal 2009 in poi, invece, non si sono osservate variazioni significative in questi due gruppi di studenti. Inoltre, l'incremento medio triennale di 5 punti sembra costante in tutte le fasce di punteggio, dagli studenti meno bravi, a quelli più bravi.

- *L'andamento dei punteggi nelle macroaree ricalca quello del dato nazionale*. Tutte e cinque le macroaree hanno fatto registrare una stabilizzazione dei risultati in matematica dal 2009 in poi, così come avviene a livello nazionale. Centro, Sud e Sud Isole, inoltre, hanno mostrato un incremento rispetto al 2003 e al 2006 (+20 punti in media), mentre nel Nord Est e nel Nord Ovest l'incremento è stato rilevato solo rispetto al 2006. Nord Ovest e Nord Est sono le aree che sul lungo periodo hanno mostrato un incremento medio triennale più basso (+2 punti). Il Centro e il Sud Isole superano 5 punti, il Sud Isole sfiora 7 punti.

Ampliando il quadro verso una visione d'insieme, emerge un lieve miglioramento nella media dei risultati in matematica sia per INVALSI che per PISA, ma la media è accompagnata da una varianza che rimane gravosa in termini di indirizzo scolastico e territorio geografico, con risultati migliori al Nord-Est e nei Licei e peggiori nel Sud e nelle Isole e negli Istituti Tecnici Professionali.

Sul piano internazionale, pur confermandoci in media OCSE, la nostra *literacy matematica* si pone al di sotto di quasi tutti i Paesi europei paragonabili al nostro in termini di PIL pro-capite.

Tali divergenze pongono una questione, ancor prima che didattica, di carattere formativo. Anche Baldacci (2016) sostiene che è della scuola il compito di garantire a tutti gli scolari il raggiungimento delle conoscenze e delle competenze fondamentali. Egli parla dell'idea di uguaglianza delle opportunità, sostenendo che il sistema deve garantire a tutti le stesse opportunità, così i risultati dipenderanno solo dal merito personale.

In questo momento, i risultati negano l'uguaglianza delle opportunità, inficiando non solo il rendimento in matematica, ma – essendo quest'ultima chiave di lettura della realtà - il principio del pieno sviluppo della persona umana costituzionalmente protetto.

4.8 La percezione della matematica

Modificare al rialzo la *connessione* dei discenti con la disciplina della matematica è il presupposto per poter operare un cambiamento dell'offerta formativa tale da normalizzare il livello del loro apprendimento a prescindere da fattori socio-economici, che pure sembrano pesare nel determinare il rendimento scolastico nel suo complesso.
Il discorso sulle competenze sostenuto in precedenza ci induce a pensare che tale offerta formativa prescinda, allo stato attuale, da un aspetto di carattere emotivo.
Il costrutto dell'atteggiamento è ampiamente utilizzato da insegnanti e ricercatori nell'insegnamento della matematica. Spesso, tuttavia, la diagnosi di "atteggiamento negativo" da parte degli insegnanti è un'attribuzione causale del fallimento degli studenti, percepito come globale e incontrollabile, piuttosto che un'interpretazione accurata del comportamento degli studenti, capace di guidare l'azione futura.
La Matematica è infatti, senza ombra di dubbio, la materia che nell'ambito scolastico spaventa di più i giovani studenti. Sono innumerevoli le difficoltà legate all'insegnamento di questa disciplina: tra le più incisive vi è probabilmente la scarsa motivazione degli studenti, proveniente dal disinteresse verso nozioni e contenuti che, paiono lontani dal loro quotidiano. Di Martino e Zan (2010) evidenziano la problematica dell'atteggiamento negativo nei confronti della matematica, che si esplica secondo tre dimensioni distinte:

- *la dimensione emozionale;*
- *il senso di auto-efficacia;*
- *la visione della disciplina.*

Nel rapporto di interattività non lineare tra docente e discente ai fini della costruzione della competenza, conta dunque anche che si ponga in questione il discente stesso e la sua *intenzione* di impegnarsi a decontestualizzare e ricontestualizzare le sue conoscenze e le sue abilità.

A tal proposito è interessante la differenza tra *situazioni didattiche* e *situazioni a-didattiche* secondo Brousseau (1986): le prime sono situazioni in cui l'insegnante interviene attivamente nel processo di apprendimento dell'allievo, esplicitando ciò che vuole ottenere, spiegando ogni dettaglio, dichiarando che cosa si deve fare, dire, come risolvere, che cosa scrivere, cosa si aspetta che essi dicano o facciano. In questo tipo di situazioni l'insegnante si sostituisce allo studente, rendendo vincente quello che Brousseau (1986) chiama il *contratto didattico*: l'allievo non è così impegnato a imparare la matematica, ma a imparare quali sono le attese dell'insegnante, esplicite e, soprattutto implicite. Eppure c'è una vera costruzione di apprendimento concettuale, e quindi di costruzione di competenza, solo se si è coinvolti responsabilmente in tale costruzione e se si percepisce un gusto all'apprendimento: questo può avvenire solo se quel che si offre come contenuto di riflessione, di scoperta, di sistemazione, è confacente al bisogno di chi apprende.

Ciò è quindi in linea con l'idea di situazioni a-didattiche di Brousseau, ossia situazioni che vengono proposte dall'insegnante in modo indiretto o – in un certo modo – come puro spunto. L'insegnante ha una funzione di regista e non di mediatore, si limita ad osservare, indirizzare, dirigere la discussione, affidando così agli allievi la gestione della situazione. Gli studenti sanno che lo scopo dell'attività è di apprendimento di qualche cosa, ma non sanno quale sia il sapere in gioco; sta quindi agli allievi accettare la responsabilità della situazione proposta, impegnarsi, discutere, scoprire, progettare, risolvere, validare e socializzare le proprie scoperte. Quando si giunge ad una conoscenza condivisa, l'insegnante cessa di avere una pura funzione di regista, riacquistando la funzione di insegnante tramite l'istituzionalizzazione del sapere raggiunto.

In questo tipo di situazione, il contratto didattico non ha un ruolo importante come nelle precedenti situazioni, dato che l'insegnante non dichiara preliminarmente che cosa vuole ottenere dagli allievi ma affida la costruzione della conoscenza alla loro stessa responsabilità. Confrontando le situazioni a-didattiche con quelle didattiche

si deduce che l'atteggiamento d'aula e l'impegno richiesti allo studente sono ben diversi: nella situazione a-didattica si chiede all'allievo di attivarsi, mentre nella situazione didattica si chiede all'allievo di riprodurre ciò che ha detto l'insegnante.
Molti autori, tra cui ad esempio Sbaragli (2011), fanno notare che in classe si tende a lavorare per esercizi più che per problemi. Gli esercizi, come spiega D'Amore (2003), sono caratterizzati dal fatto che la loro risoluzione richiede solo l'uso di regole già apprese e, semmai, in via di consolidamento; quindi rientrano nella categoria "rafforzamento" o "verifica", mentre i problemi coinvolgono o l'uso contemporaneo di più regole o la successione di azioni la cui scelta è un atto strategico, creativo, dell'allievo stesso. Per quanto l'applicazione di regole (norme, esperienze, etc.) sia importante, è bene notare che il processo risolutivo di un problema (non di un esercizio) genera anche un nuovo apprendimento. Infatti, come ricorda ancora D'Amore (2003), l'esercizio si svolge nella *zona effettiva* di Vygotskij (1978), mentre il problema si svolge nella *zona prossimale*.
Tutto ciò mostra quanto sia importante sollecitare interesse, gusto, desiderio di far uso delle conoscenze possedute e di integrare quelle ancora insufficienti per raggiungere uno scopo (risolvere un problema) che trascenda il mondo della scuola e vada in direzione della vita quotidiana dello stesso studente.
Nelle scuole, tuttavia, la matematica è nota come la disciplina che registra il maggior numero di insufficienze con conseguente demotivazione (se non repulsione) da parte degli studenti e scoraggiamento da parte degli insegnanti (Hoffmann, et al. ,2005).
Negli studenti, inoltre, si formano stati di apprensione e paura nei confronti della matematica. Tali dimensioni emotive, unite al senso di auto-efficacia e alla visione della materia già citate, fa apparire riduttiva la dicotomia *atteggiamento positivo/negativo*, e suggerisce piuttosto di considerare *profili diversi di atteggiamento* a seconda delle dimensioni maggiormente implicate. Ad esempio possiamo dire che il profilo di alcuni ragazzi è caratterizzato da un basso senso di auto-efficacia, mentre quello di altri da una visione distorta della matematica.
Alla luce di queste ulteriori osservazioni, la diagnosi di atteggiamento negativo comincia ad assumere una connotazione più costruttiva: non più una generica

diagnosi che chiude ogni possibilità di recupero, ma un'interpretazione che può indicare una direzione da seguire per la fase docente.

4.9 Il ruolo del docente

Se agli studenti e ai discenti in generale è richiesto di sviluppare le otto competenze chiave definite in chiave europea, a maggior ragione i docenti devono essere ispirati all'esercizio di tali competenze. In realtà, proprio la definizione di competenze per l'*apprendimento permanente* mostra che il coltivare indefinitamente nuovi obiettivi di apprendimento deve essere pertinenza di ciascuno, a prescindere dal suo ruolo.
È bene sottolineare che un cambiamento della società così rapido ci sta portando all'esigenza di nuove strategie per far sì che gli studenti acquisiscano le competenze previste. A rendere tale esigenza sempre più impellente non è solo *la società delle competenze*, ma anche il rapido sviluppo della tecnologia. Gli attuali studenti del biennio delle superiori sono tutti nativi digitali e non è possibile ignorare che il mondo che li circonda è completamente mutato, per cui spetta a tutte le istituzioni educative e anche ai docenti il ruolo di indirizzo dei giovani all'utilizzo formativo delle tecnologie.
Dunque le competenze del docente devono essere in pieno esercizio di consapevolezza, e debbono distribuirsi su diversi profili. Prendendo spunto dai diversi campi di competenza della professione docente proposti da Fumarco (2006), è possibile riconoscere le seguenti competenze chiave per la docenza in generale e della matematica in particolare che possono generare nello studente un apprendimento attivo, sociale, riflessivo (metacognitivo):

- Competenza comunicativa
- Competenza sociale
- Competenza digitale
- Competenza metodologica
- Competenza di innovazione
- Competenza emotiva
- Competenza matematica

4.9.1 Competenza comunicativa

La competenza comunicativa è una competenza fondamentale per i docenti poiché la comunicazione didattica (che consente il processo di insegnamento-apprendimento, permette di condividere la cultura, determina il miglioramento personale e professionale) necessita prima di tutto della comunicazione, altrimenti viene meno l'interazione.

La comunicazione ha tre codici: il codice verbale, il codice non verbale e quello paraverbale; la comunicazione didattica richiede agli insegnanti di padroneggiare questi codici in stretta complementarità, supportati da mezzi tecnologici (competenza tecnologica), in modo da mettere in atto quello che viene chiamato l'*atto didattico* (Dominguez, Garcia, 2012). Quest'ultimo è fondamentalmente indagatore, aperto e comunicativo, ma il suo potenziale dipende dal livello creativo-investigativo di ciascun insegnante. Dobbiamo ricordare che la comunicazione didattica è un processo sia scientifico che – in un certo modo - *artistico*, e con un supporto tecnologico si trasforma in base alle esigenze della società.

Il dominio della competenza comunicativa da parte dei docenti implica:

- L'aggiornamento interculturale, accademico, artistico e scientifico-tecnologico, che richiede ai docenti il loro impegno quotidiano per avanzare nello sviluppo delle competenze;
- Il dominio del vocabolario e dei moduli della scienza e della tecnologia che insegniamo;
- L'incidenza e l'uso dei media, insieme alla creazione di ambienti interattivi come: forum, chat, wiki, comunità di apprendimento, etc;
- L'armonia emotiva e lo sviluppo del sistema metodologico e didattico, sui quali costruiamo il nostro modo di agire e di costruire conoscenza e interagire con colleghi e studenti;
- L'uso della metodologia didattica ed euristica più appropriata, l'applicazione rigorosa della stessa ed il miglioramento dell'interazione con gli studenti, il corpo docente e la comunità educativa nel suo insieme.
- Interiorizzazione del significato e del ruolo della comunicazione nel processo di insegnamento-apprendimento;

- Comprensione e applicazione di codici e funzioni essenziali nella comunicazione;
- Uso della metodologia olistico-didattica dell'azione comunicativa;
- Dominio del dialogo personale, con la comunità e con le istituzioni;
- Trasformazione continua del modo di essere, di pensare e di agire in classe e nel centro educativo nel quale si lavora;
- Progettazione di compiti più pertinenti con un approccio globale e creativo, che avvicini ogni studente e ogni cultura.

Tutti questi aspetti costituiscono la base per il processo di formazione degli insegnanti. Dominare tale competenza è molto importante poiché maggiore è la competenza comunicativa sviluppata dagli insegnanti, più essi possono svilupparla negli studenti.

Sempre secondo Dominguez e Garcia, la competenza comunicativa è integrata da alcune delle seguenti sub-competenze, che possono sembrare anche lontane dal mondo matematico, ma che costruiscono le fondamenta del metodo attraverso il quale descriverlo:

- *Narrativa*, che si sviluppa attraverso i seguenti compiti:

1. Identificare testi e spazi testuali che presentino fatti di realtà e/o fantasia legati alle unità di apprendimento che costituiscono il curriculum;
2. Armonizzare i testi scritti con la loro presentazione orale;
3. Sviluppare attività con una espressione diacronica, adeguatamente raccontate ed esposte, accompagnate da gesti pertinenti;
4. Coinvolgere gli studenti nel presentare storie di vita, situazioni esperienziali e ricordi che li motivino e mettersi in gioco, nella creazione di scenari di miglioramento continuo del discorso orale, scritto e disegnato-rappresentato;
5. Costruire uno spazio web di lavoro per la materia, che inglobi alcune narrazioni di valore e coinvolga in questa selezione gli studenti, scegliendo portali adeguati al nostro oggetto di studio.
6. Identificare testi pertinenti alle varie culture presenti in classe e in linea con gli assi di formazione;

7. Condividere le esperienze di insegnamento, personali e istituzionali, con il personale docente e la comunità educativa;
8. Elaborare un portfolio o quaderno di campo che riassuma le esperienze più importanti, costruendo ogni quindici giorni il resoconto rappresentativo della pratica professionale.

- *Interrogativa*, che consiste nel porre le domande più opportune agli studenti e servono a stimolare il pensiero ed attivare, così, il processo di insegnamento-apprendimento. Sapere come fare domande non è semplice, richiede che gli insegnanti siano consapevoli del potenziale dei loro studenti. Le domande più stimolanti sono domande aperte, ma allo stesso tempo devono essere connesse con l'esperienza di vita, gli interessi e le culture dei nostri studenti. Ci sono domande di carattere istruttivo e domande di empatia ed emotività. Per le prime, l'insegnante deve costruire un banco di domande fondamentali per la comprensione dei fenomeni e dei dati, poi presentare queste domande alla classe e invitare ogni studente a dare la sua risposta, così il docente può conoscere le percezioni degli studenti ed è in grado di valutare se essi padroneggiano i concetti necessari per studiare il prossimo argomento; inoltre, a fine modulo, potrà eseguire le "domande ponte" per capire cosa hanno imparato. Mentre, quando si scelgono le domande di empatia ed emotività, bisogna tenere in conto fattori come quali valori sviluppare tra gli studenti e la comunità, il senso del compito, le esperienze personali. Questa competenza viene consolidata selezionando per ciascuna unità di apprendimento gli elementi essenziali da presentare, mettere in sequenza e strutturare in base alla padronanza di questa sub-competenza da parte degli studenti. Il personale docente deve fare un rigoroso ed equilibrato utilizzo delle domande appropriate e preziose che pone alla classe e ad ogni studente.

Esplicativa, che indica il modo in cui si presenta, esprime e descrive la conoscenza. Tale sub-categoria è cruciale per lo stimolo degli studenti. Spiegare significa esporre con coerenza, ordine e rigore; inoltre la spiegazione richiede un alto dominio dei codici verbali, non verbali e paraverbali e una grande ricchezza di vocabolario. Alcuni dei compiti per consolidare questa sub-competenza sono:

1. costruire un vocabolario personale e professionale della materia insegnata;

2. auto-analizzare le proprie spiegazioni registrando audio o video e studiando meticolosamente il codice utilizzato, i messaggi, i meta-messaggi e la qualità del processo relazionale sviluppato.

Nella società interculturale e della conoscenza con il grande uso delle TIC il personale docente deve iniziare, o meglio ha già iniziato, un processo di adattamento di tale sub-competenza data la ricchezza dei diversi linguaggi e il potenziale delle TIC nell'ambiente scolastico e sociale.

- *Drammatizzazione (role-playing)*, che implica la capacità, la conoscenza e l'abilità di rappresentare le azioni e le reazioni che ci si aspetta da un'identità professionale evoluta, impegnata nelle sfide della società in continuo cambiamento, con caratteristiche interculturali e tecnologiche molto marcate. Risultano essenziali per sviluppare tale capacità la lettura e critica dei ruoli di opere rappresentative, della letteratura in generale, o del teatro in particolare, registrazione del ruolo che noi come insegnanti assumiamo in classe e successiva analisi e valutazione dello stile e delle azioni che svolgiamo e che modalità di indirizzo assumiamo (autoritario, partecipativo, comprensivo, etc.), osservazione del ruolo e delle azioni di altri colleghi e incontri per analisi e critiche comuni. Infatti, come si evince dagli studi di Dominguez, Medina e Lopez (2018), per avanzare nella competenza comunicativa è utile scegliere un tema in cui ci si sente particolarmente preparati ed esporlo ad un gruppo di colleghi. Poi narrare l'esperienza; e ancora utilizzare questa esperienza per riflettere, analizzare la qualità della propria capacità comunicativa, tenendo presente lo stile di presentazione e il dominio dei codici.

4.9.2 La competenza sociale

La competenza sociale è la sintesi e l'integrazione di saperi e conoscenze che promuovono la ricerca socio-didattica. Nelle istituzioni educative questa competenza si concretizza nel comprendere le relazioni sociali e di esercitarle a partire dall'empatia. Pertanto la padronanza di questa competenza richiede una profonda conoscenza delle relazioni sociali più rilevanti nello sviluppo dei processi educativi. È necessario che gli insegnanti padroneggino un insieme di contenuti, modelli, processi e manifestazioni sociali per comprendere le relazioni e le azioni

di colleghi, studenti e famiglie. Questo insieme è composto da: tipi di relazioni sociali, identità socio-relazionale, immagine sociale di sé, processi interattivi, clima sociale della classe e delle istituzioni, difficoltà di interazione sociale, interferenze nell'azione sociale e diversi altri aspetti.

Al fine di sviluppare questa competenza, i docenti devono analizzare e valutare l'interazione didattica, per diventare facilitatori delle relazioni con gli studenti e le diverse comunità, collegando il dominio di questa competenza alle altre e in particolare alla competenza comunicativa. Gli elementi chiave per un buon dominio delle relazioni possono essere visti quali:

- Uso complementare dei vari codici e individuazione dei bisogni degli studenti e dei loro stili di vita;
- Identificazione delle relazioni preferite che costituiscono l'interazione, valutandone l'intensità e il significato (empatia, fiducia, collaborazione; o presenza dell'opposto: rifiuto, sfiducia, competitività);
- Agire in ogni situazione di insegnamento-apprendimento nella convinzione dell'incidenza delle relazioni e nella necessità di promuovere le interazioni di armonia, equilibrio e sviluppo equilibrato degli esseri umani;
- Espandere il progetto relazionale tra tutti i partecipanti del processo di insegnamento-apprendimento, diventando consapevole del ruolo peculiare che riguarda ciascun membro dell'interazione;
- Concepire il clima sociale della classe e dell'istituzione educativa come l'ecosistema più fertile per la formazione integrale degli studenti.

Il dominio della competenza sociale parte dalla conversione della pratica interattiva in un processo nucleare e anche dallo sviluppo di questa pratica come un insieme di decisioni e forme di relazione autenticamente armoniche e formative. Il clima sociale generato dalle pratiche applicate dall'insegnante è il nucleo del dominio di questa competenza. In altre parole, l'insegnante, a partire dalla sua pratica interattiva, applica i metodi didattici più rilevanti e plasma il clima tramite un processo di riflessione e di ricerca. Più il docente domina questa competenza, più è

in grado di saper migliorare il suo stile di convivenza con colleghi, studenti e collaboratori, analizzando di volta in volta la "pratica svolta".

Per raggiungere questi obiettivi, il personale docente può utilizzare la metodologia didattica ed euristica che consiste in queste azioni:

- Valutare i contributi alle situazioni di conflitto in classe e fuori dalla classe;
- Comprendere le varie relazioni e interazioni;
- Analizzare la propria esposizione e il dominio effettivo dei codici in ogni situazione di insegnamento-apprendimento;
- Impiegare la strategia delle dinamiche di gruppo;
- Progettare e impegnarsi in nuovi climi di lavoro, nel centro e in classe;
- Confrontare le proprie visioni con colleghi, studenti e famiglie.

Tutte queste procedure di analisi e studio dell'interazione servono affinché ogni insegnante impari a generare un clima favorevole all'interazione didattica e sia in grado di padroneggiare anche le situazioni più complesse. In questo modo è necessario che ogni insegnante si conosca, e quindi possa, ad esempio, auto osservarsi e co-osservarsi, personalmente e in squadra, in modo da vivere l'esperienza pratica in tutta la sua complessità, la sua portata e la sua proiezione socio-relazionale.

4.9.3 La competenza digitale

L'insegnante è l'agente principale che deve aiutare gli studenti a sviluppare le competenze digitali, ma per far ciò è egli stesso che, innanzitutto, deve esserne padrone; come sottolinea Bocciolesi (2011), per i docenti sono necessari aggiornamenti sia sull'utilizzo degli strumenti tecnologici sia sugli effetti che questi possono portare tanto nella vita degli studenti in generale quanto nella loro capacità di apprendimento. Quasi tutti i paesi europei invitano all'uso di un'ampia varietà di strumenti TIC nel processo di insegnamento-apprendimento (alcuni esempi sono: email, pagine web, wiki, portfolio, webquest, piattaforme online o numerosi strumenti hardware). Si suggerisce agli insegnanti di ricorrere a diversi tipi di *device*

per creare uno spazio di apprendimento online personalizzato che integri quello fisico.

Ad ogni modo, Warwick et al. (2010) ricordano che la tecnologia da sola non può cambiare l'insegnamento e l'apprendimento in classe, ma richiede piuttosto la mediazione dell'insegnante. Il ruolo dell'insegnante è quello di sviluppare metodi innovativi utilizzando le proprie conoscenze pedagogiche per elaborare compiti di apprendimento appropriati. A sottolineare l'importanza della formazione dei docenti contribuisce anche Delors (1996) il quale afferma che per migliorare la qualità dell'istruzione dobbiamo iniziare con il migliorare il reclutamento, la formazione, la situazione sociale e le condizioni di lavoro del personale docente, perché quest'ultimo non sarà in grado di rispondere a ciò che è previsto se non ha le conoscenze e le competenze, le qualità personali, la motivazione e le possibilità professionali richieste.

4.9.4 La competenza metodologica

È importante che i docenti conoscano i diversi metodi di insegnamento, che sappiano come e quando applicarli e, soprattutto, valutarli. La base dei processi innovativi è l'integrazione di modelli e metodi. Secondo Medina (2015), viene evidenziato come efficace un mix tra il modello socio-comunicativo e quello collaborativo; tra i metodi di insegnamento si mette in evidenza il metodo per progetti, la soluzione dei problemi, gli studi di caso, l'apprendimento autonomo, dinamiche di gruppo e tutte quelle tecniche che favoriscono la collaborazione tra docenti e studenti. Questi metodi utilizzati nel campo dell'insegnamento sono arricchiti da metodi euristici. I nuovi metodi che portano innovazione, cambiamento e, trasformazione, hanno bisogno di questa peculiarità: essere una combinazione tra metodo di insegnamento e metodo euristico. L'insegnamento ha un compito che si può riassumere con la seguente domanda: quale metodologia didattica e di ricerca (euristica) bisogna applicare per sviluppare queste competenze? Gli insegnanti devono costruire il sistema metodologico che meglio soddisfa tali ragionevoli aspettative.

Questo approccio metodologico è dialogico, interattivo e promotore dei compiti più importanti che sintetizzano lo stile di lavoro dell'insegnante. Si sottolinea anche,

sempre da Medina, l'importanza della complementarità tra autonomia e collaborazione: avanzare nel dominio delle competenze significa applicare una metodologia che favorisca e/o promuova la complementarietà tra autonomia e collaborazione.

Il docente oggi ha a disposizione diversi strumenti e diverse strategie per insegnare, ma la sua abilità dipenderà soprattutto dal capire come e quando utilizzare tali strumenti e tali strategie. Bocciolesi (2014a) in questo senso afferma che l'uso delle TIC offre agli insegnanti una pluralità dell'offerta, che a seguito di un rilievo e consapevolezza delle differenze individuali, potrà valorizzare il potenziale cognitivo e umano di ognuno. Ne deriva la necessità di ridefinire i processi di insegnamento-apprendimento degli alunni, che hanno bisogno di proposte plurali, differenziate e flessibili, al fine di valorizzare le molteplici forme di intelligenza.

4.9.5 La competenza di innovazione educativa

La parola chiave per migliorarsi sempre di più come professionisti dell'educazione è *innovazione*. Secondo Gairin (2002) le caratteristiche di base di questa competenza sono:

- *Definizione degli obiettivi*: l'innovazione non può esistere se non ha un pubblico a cui si rivolge né chiari obiettivi da raggiungere. Se si vuole innovare nell'ambito della didattica è necessario farlo con obiettivi chiari, a breve e a lungo termine.
- *Pianificazione*: una volta fissati gli obiettivi, è necessario pianificare come raggiungerli e in che tempi. Per quanto concerne il come raggiungerli, entrano in gioco fattori come l'osservazione degli studenti a cui è rivolta, l'analisi delle risorse disponibili (umane e tecnologiche), analisi di lezioni svolte e risultati conseguiti, l'impostazione di metodi valutativi del raggiungimento degli obiettivi, etc. Solo con una pianificazione dettagliata sarà possibile raggiungere gli obiettivi desiderati.
- *Attuazione*: Se le prime due fasi sono teoriche, questa è quella pratica del lavoro. Programmare tutto è utile, però bisogna tener in conto che ci possono essere fattori che non possono essere previsti.

- *Valutazione dei risultati*: È necessario conoscere il punto di partenza e avere un quadro chiaro su dove si vuole arrivare e dove si è effettivamente pervenuti, richiamando la già citata dimensione formativa della programmazione.
- *Collaborazione*. L'innovazione non può entrare nelle nostre scuole se è solo un insegnante che la introduce: essa è un processo che coinvolge tutti: studenti, famiglie, colleghi. L'introduzione dell'innovazione nelle scuole può essere vista come lo sviluppo di un progetto di cambiamento in cui tutti (docenti, studenti, famiglie) devono essere coinvolti. Da un lato l'insegnante assume nuovi modelli e stili di insegnamento che configurano la consapevolezza interculturale e la progettazione di nuovi compiti; da un altro lato dovrebbe crescere negli studenti il senso di identità come parte attiva della comunità educativa, del loro proprio processo di apprendimento e dello sviluppo delle loro capacità di pensiero critico; da un altro lato ancora ci sono le famiglie, nelle quali la scuola deve fomentare il senso di collaborazione con essa, costruendo le basi per uno sviluppo plurale e interculturale.

Alla base di questo disegno di modelli di innovazione c'è una valutazione della cultura innovativa che pretenda di convertire l'istituzione scolastica in un'organizzazione destinata a trasformare la società.

4.9.6 La competenza emotiva

Un insegnante è fondamentalmente un leader. Che sia un buon leader o meno, questo dipende da lui, ma non si può negare che ha una grande responsabilità e influenza sull'intera classe: e in tutte le capacità del leader (come prendere decisioni, negoziare, comunicare) è presente la componente emotiva. Quindi è importante che il leader sviluppi questa competenza a fianco a tutte le altre: il docente dovrebbe essere in grado di capire se stesso, attraverso l'introspezione, e gli studenti, grazie alla loro comunicazione fatta di codici verbali, non verbali e paraverbali.

L'insegnante dovrebbe prestare attenzione ai segni comunicativi degli studenti, come le espressioni del viso, in modo che possa comprendere la loro "esperienza emotiva" (le espressioni facciali specifiche delle emozioni primarie, come gioia, tristezza, rabbia, paura, disgusto e sorpresa, sono facili da leggere e sono di lettura immediata). Gli studenti, per loro età, ancora non hanno un buon controllo, né coscienza, delle loro emozioni e quindi hanno bisogno di guide per imparare a conoscersi, auto-motivarsi, avere fiducia in se stessi, capire gli altri. Queste abilità sono i fattori di protezione contro le situazioni di rischio e la prevenzione dei comportamenti a rischio. Le persone emotivamente competenti, che possono controllare i loro sentimenti, gestire rapidamente le loro emozioni negative e pericolose, sono più favorite in tutti gli ambiti della vita: nelle relazioni intime, nel lavoro (sanno come afferrare le regole implicite che portano al successo), le relazioni con gli altri.

Il docente pertanto deve essere un *leader emotivo* in grado di individuare le debolezze e i talenti dei discenti in modo da saper insegnare loro ad accettare le prime e a sviluppare i secondi. Ciò in genere avviene se il docente ha una visione positiva di se stesso, una buona auto-consapevolezza dei propri punti di forza e dei propri punti di debolezza, la capacità di prefissarsi mete concrete e di stabilire i passi per raggiungerle e una capacità di mediazione, in controllo dei propri impulsi.

4.9.7 La competenza matematica del docente

Entrando in un ambito della nostra disciplina di riferimento, è necessario portare con sé in analisi tutto ciò che è stato sostenuto finora in merito alle competenze appena descritte. Un buon insegnante di matematica – o di qualunque altra materia – non può prescindere dalle capacità di cui si è argomentato.

Llinares (2016) definisce la competenza matematica del docente della disciplina come la capacità di osservare professionalmente il pensiero matematico dei suoi studenti. Tale competenza consiste dunque nella capacità del docente di comprendere il livello di padronanza raggiunto dall'alunno in un dato argomento analizzando (con occhio esperto) le sue risposte. In altre parole, davanti ad un quesito matematico il docente non deve limitarsi a stabilire se la risposta dello studente è giusta o sbagliata, ma deve avere la capacità di analizzare la risposta data,

la quale gli fornisce il livello di apprendimento raggiunto dall'alunno per quell'argomento. Inoltre un docente capace di osservare professionalmente il pensiero matematico degli alunni, davanti ad una risposta "diversa" da quella che ci si aspetta, è anche in grado di legittimare eventuali strategie utilizzate dall'alunno per risolvere un problema, pur se non prettamente standard.
Un docente di matematica non può "accontentarsi" di una risposta secca data dall'alunno (che potrebbe essere casualmente corretta), ma deve investigare sulla giustificazione della risposta. Si potrebbe ritenere quasi migliore una risposta non corretta ma "ben argomentata", che una risposta corretta che non si è in grado di argomentare. La matematica è una materia che, tra le altre cose, deve insegnare a saper analizzare e ragionare, quindi è fondamentale per un docente guidare gli studenti non solo verso la risposta corretta, ma verso la capacità di saperla trovare da soli, attraverso l'analisi del problema e l'applicazione della giusta strategia. Per riuscire in questo compito il docente dovrà, di volta in volta, osservare professionalmente il pensiero matematico degli studenti mediante le risposte che questi danno per individuare dove sono arrivati nel loro cammino verso l'apprendimento e, di conseguenza, preparare le successive lezioni in base alle esigenze della classe.

4.10 Le criticità come potenzialità per una migliore azione didattica

L'esercizio delle competenze sopracitate non costituisce un punto di arrivo, bensì di partenza per far sì che l'apprendimento della matematica vada oltre i risultati, di certo non entusiasmanti, evidenziati dalle prove INVALSI e OCSE PISA.
La mancata uniformità di risultati rilevata è indice di un elevato livello di dispersione attorno ai valori medi di rendimento. Questo concetto è fondamentale per costruire un approccio didattico che vado oltre questo scenario.
Logicamente, si potrebbe dedurre – per esempio - che uniformare l'offerta formativa del Nord Est al resto del territorio nazionale sarebbe una soluzione adatta a scongiurare il problema; in realtà questo rimedio sarebbe parte del male, perché i risultati parlano chiaro: dati contesti di indirizzo e territoriali diversi, è necessario *non uniformare ma adattare* l'offerta formativa alle condizioni ambientali.

L’adattamento della docenza matematica, in base alle competenze richiamate, deve poggiarsi su alcuni pilastri fondamentali:

- *Integrazione*: Utilizzo sia di risorse tecnologiche che di strumenti classici e interazione tra le fasi di collaborazione e autonomia;
- *Inclusione*: Il tener conto della diversità degli studenti;
- *Interpretazione e modellizzazione*: Il puntare sulla capacità di interpretare *in* e *dalla* matematica, di interpretare il linguaggio matematico in realtà e la realtà in linguaggio matematico;

Osserviamo di seguito questi concetti fondamentali.

4.10.1 L’azione didattica integrata

Le esigenze dei molti rispetto a quelle dei singoli possono apparire in contrasto. Se da un lato la collaborazione può essere una preziosa risorsa per la classe, dall’altro abbiamo un insieme di individui che, al termine della loro istruzione e formazione, si lanceranno soli nel mondo del lavoro. Quindi è importante pensare anche allo studente come singolo, cercando di sviluppare in lui fiducia in se stesso e nelle sue possibilità, cognitive e sociali. Ogni studente ha bisogno di imparare anche a lavorare da solo, deve raggiungere un certo livello di autonomia. D’altra parte, come abbiamo già visto prima nella competenza Metodologica, anche Medina (2015) sottolinea l’importanza della complementarietà tra autonomia e collaborazione. Infatti, applicare sempre un metodo collaborativo potrebbe portare i ragazzi meno bravi a non essere autonomi o ad appoggiarsi troppo a quelli più bravi, creando così una dannosa dipendenza; mentre far lavorare sempre i ragazzi individualmente finirebbe per creare troppa competizione negativa all’interno della classe, e non permetterebbe ai ragazzi di apprendere quella capacità di saper lavorare serenamente insieme agli altri. Nel caso dell’applicazione di un metodo collaborativo, questo ci permette di animare il gruppo, concepito come entità capace di costruire le proprie conoscenze, superando le logiche di mera trasmissione del sapere.

Inoltre, se oltre a lasciare che gli studenti collaborino, lasciamo anche che cooperino tra loro affinché costruiscano da soli il loro sapere, allora si può parlare di apprendimento costruzionista. Esso mira a coinvolgere nel processo di apprendimento i discenti come protagonisti, e non è da intendersi come una strategia finalizzata a rispondere solo ai bisogni educativi speciali di alcuni. Infatti, studi sempre più numerosi mettono in evidenza il bisogno di un'offerta formativa eterogenea per tutti. Questo naturalmente non equivale a dire che bisogna trovare e attuare tanti modi di insegnare diversi quanti sono gli allievi nella classe, ma che è utile utilizzare forme di attività didattica "mista", che richiedano l'uso vario e combinato di competenze cognitive diverse: analitiche, pratiche e creative, in modo che l'alunno sia sempre più a suo agio rispetto al proprio stile cognitivo e nello stesso tempo possa acquisire conoscenza, consapevolezza e flessibilità con gli altri stili di pensiero e apprendimento (Sternberg, 1999).

L'apprendimento cooperativo (cooperative learning) facilita e promuove la realizzazione di apprendimento sociale al di là dell'individualismo: questo modello tenta di creare un clima di classe che promuove un atteggiamento di solidarietà attraverso il lavoro di gruppo; ogni gruppo ha un obiettivo comune, nessuno vince e nessuno perde. Imparando, vincono tutti i membri del gruppo. Inoltre "la squadra" è uno degli elementi fondamentali delle imprese moderne, per cui è importante applicare questo modello. Un apprendimento che veda gli alunni protagonisti, disponibili ad aiutarsi reciprocamente, a costruire insieme le loro conoscenze, certamente appare il più adeguato a soddisfare le dimensioni dell'individualizzazione e della personalizzazione.

Certamente l'apprendimento cooperativo, che a tali principi si ispira, può essere indicato come il più adeguato a valorizzare l'apporto di ciascuno. L'apprendimento cooperativo è caratterizzato da una forte interdipendenza positiva tra membri. Tale condizione non si raggiunge né riunendo semplicemente i membri, né limitandosi a stimolarli alla cooperazione, né richiedendo loro di produrre insieme un qualche prodotto finale. Essa, invece, è frutto della capacità di strutturare in maniera adeguata il compito da assegnare al gruppo, di allestire i materiali necessari per l'apprendimento e di predisporre le attività per educare i membri ai comportamenti sociali richiesti per un'efficace cooperazione.

È importante, però, precisare che questa nuova forma di apprendimento non si oppone al lavoro individuale, anzi è qualcosa in più, è considerata come una forma di apprendimento complementare alla precedente, che rafforza lo sviluppo personale degli studenti in molti aspetti. Così, il metodo di lavoro di apprendimento cooperativo cerca di far lavorare insieme gli studenti affinché imparino individualmente ma al contempo siano loro in qualche modo responsabili sia del proprio apprendimento che di quello dei loro coetanei. Un altro vantaggio di questo metodo è il tener in conto della diversità degli studenti; sappiamo già che tenere conto della diversità significa tenere a mente che viviamo in aule dove ci sono diversi punti di partenza, diversi interessi, diverse motivazioni e ritmi di apprendimento, quindi è importante applicare metodi e strategie in modo che tutti possono imparare, ognuno con il proprio ritmo. Uno dei punti di forza di questa strategia è dare a tutti un "ruolo" da svolgere, anche agli alunni con deficit; ciò ha il vantaggio di chiamare in causa ognuno con le proprie capacità, risorse, competenze nella risoluzione del compito. Secondo gli autori Comoglio e Cardoso (2000), attraverso la valorizzazione delle risorse individuali e l'aiuto reciproco, gli alunni in difficoltà trovano un ambiente favorevole al loro processo di apprendimento perché percepiscono maggior fiducia verso se stessi, quindi migliora la loro autostima e guardano ai loro errori e alle loro difficoltà con maggior fiducia nel miglioramento. Affermano gli autori Baldrighi, Pesci, e Torresani (2003), infatti, che è stato possibile osservare come in tale contesto diminuisce lo squilibrio nella partecipazione tra alunni dotati e alunni in difficoltà.

Come si accennava in precedenza, tuttavia, non dobbiamo perdere di vista il singolo. È giusto creare occasioni nelle quali gli studenti affrontino da soli prove individuali. Dunque, ad una didattica che coinvolge tutti, dobbiamo affiancare una didattica che non perde di vista l'alunno nella sua *irripetibile singolarità*, cosa egli è capace di fare, con quali tempi e quali strategie. Secondo Baldacci (1993) è necessario adeguare l'insegnamento alle caratteristiche individuali degli alunni (ai loro ritmi di apprendimento, alle loro capacità linguistiche, alle loro modalità di apprendimento ed ai loro prerequisiti cognitivi), cercando di conseguire individualmente obiettivi di apprendimento comuni al resto della classe. Bisogna attraversare strade diverse, più corte, più lunghe, più attente ai bisogni di

concretezza o più astratte, ma sempre orientate al raggiungimento di traguardi formativi comuni.

Con l'aggettivo "integrato" non si intende, però, solo questa integrazione tra autonomia e collaborazione, ma anche l'integrazione tra le nuove risorse tecnologiche e le risorse classiche. Oggi nel mondo della scuola le risorse tecnologiche sono sempre più numerose. I contenuti multimediali in rete sono collocati all'interno di ciò che comunemente chiamiamo TIC. Le tecnologie dell'informazione e della comunicazione hanno potenziato esponenzialmente la creazione di contenuti, la loro ideazione, costruzione, produzione, riproduzione e ricezione; hanno generato creativamente nuove forme di rappresentazione basate sui loro grandi paradigmi e hanno proposto una nuova conversazione tra l'autore e il lettore attraverso una pragmatica digitale, con alta partecipazione del lettore nel caso di contenuti interattivi. Le competenze digitali, come abbiamo già detto, si basano sull'uso del computer per ottenere, valutare, archiviare, produrre, presentare e scambiare informazioni e comunicare e partecipare a reti di collaborazione attraverso Internet.

Inoltre Malan (2000) sottolinea che le competenze digitali sono sempre definite in termini di risultati del processo educativo e, quindi, fanno parte del cambiamento concettuale che comporta: vale a dire che il processo passa da un approccio basato su input e sull'acquisizione di contenuti a un altro focalizzato sui risultati e sull'acquisizione di competenze.

La ricerca ha dimostrato che l'uso delle TIC nell'insegnamento contribuisce ad aumentare la motivazione degli studenti verso l'apprendimento in quanto dà loro un maggiore controllo sulla propria esperienza educativa. I benefici derivati dal suo utilizzo vanno oltre l'uso di computer e Internet e sono anche estesi ad altri tipi di tecnologie, come quella dello smartphone, il cui utilizzo può contribuire all'apprendimento degli studenti e allo sviluppo personale se le modalità del suo utilizzo vengono guidate didatticamente.

Ci si potrebbe domandare se l'insegnamento basato su contenuti digitali debba completamente sostituire la didattica tradizionale. La risposta, come anticipato, risiede nell'integrazione delle due modalità. Le nuove tecnologie sono formidabili, hanno velocizzato molto determinati processi, permesso di risparmiare tempo, ma

l'estensione della cultura della virtualità porta con se un grande svantaggio: l'attitudine alla passività. L'immediatezza nella ricerca e nel trovare ciò che è necessario ci devia dallo sforzo, dall'impegno che molte cose richiedono ancora.
Esistono inoltre ancora alcuni punti a favore della didattica tradizionale:

- scrivere con la penna e la matita sono azioni manuali che stimolano le aree cerebrali alla creatività. Ecco perché l'attività "artigianale" deve sempre essere garantita, poiché stimola l'espressività e insegna attenzione e ordine;
- senza la mediazione di uno schermo le relazioni tra studenti e insegnanti sono più dirette e istruiscono le relazioni sociali;
- studiare mediante i libri vuol dire esercitare memoria e concentrazione, ostacolati, secondo alcuni, dall'uso della tecnologia digitale perché tutto è sempre a portata di un clic.

Casati (2013) afferma che l'introduzione della tecnologia a scuola va bene, ma a piccole dosi. I libri sono insostituibili dal punto di vista cognitivo, poiché proteggono una delle risorse mentali più preziose: l'attenzione. Ciò che è importante sottolineare in questo modello è che i mezzi tecnologici non sono un fine, ma un mezzo, pur riconoscendo a tali mezzi una potente capacità trasmissiva. Per questo motivo non è possibile fare a meno del computer, né d'altra parte sarebbe consigliabile affidarsi completamente ad esso conducendo tutte le attività didattiche tramite il suo utilizzo. Una soluzione è il c.d. "*curriculum bimodale*", cioè non applicare sempre un modello didattico tecnologico, ma alternarlo con modelli più tradizionali, così da potenziare l'utilizzo di internet ("memoria ausiliaria") e lo sviluppo della propria memoria.

4.10.2 L'azione didattica inclusiva

Non tutti gli alunni apprendono con gli stessi stili, tempi o strumenti, ed è compito del docente raggiungere il maggior numero di discenti possibili. In questo senso intervengono l'individualizzazione e la personalizzazione. Sempre Baldacci (1993) indica nella: *individualizzazione*: quella famiglia di strategie didattiche il cui scopo è quello di garantire a tutti gli studenti il raggiungimento delle competenze

fondamentali del curricolo, attraverso la diversificazione dei percorsi di insegnamento e nella *personalizzazione*: quella famiglia di strategie didattiche la cui finalità è quella di assicurare ad ogni studente una propria forma di eccellenza cognitiva, attraverso possibilità elettive di coltivare le proprie potenzialità intellettive.

Al di là di questa differenza fondamentale, è cruciale che il docente individui le difformità negli stili di apprendimento. Ad esempio, un modello importante di riferimento che presenta differenti stili di apprendimento è quello *Sensoriale* di Fleming e Mills (1992), detto anche modello VARK, il quale si basa sui tre principali recettori sensoriali, cioè la vista, l'udito e le funzioni legate al movimento. Tale modello ha lo scopo di determinare la funzione prevalente. In una situazione di apprendimento si usano tutti e tre gli strumenti, ma uno solo, o a volte una combinazione di due di essi, tende a prevalere sugli altri. Lo stile dominante, tuttavia, può non essere sempre lo stesso, ma può variare a seconda della situazione o del compito da affrontare. Le differenze, in fase di apprendimento, possono essere notevoli:

- *Stile Visivo*: gli allievi che preferiscono lo stile visivo in generale ricordano meglio ciò che possono vedere. Sono comunque suddivisi in due ulteriori categorie: visivo-linguistico e visivo-spaziale. Chi preferisce lo stile visivo-linguistico impara attraverso il linguaggio scritto, cioè con attività di lettura o scrittura. Chi preferisce lo stile visivo-spaziale, invece, impara attraverso grafici, tabelle disegni e videoproiezioni.
- *Stile Auditivo*: gli studenti con prevalenza dello stile auditivo hanno bisogno di ascoltare ciò che devono imparare. Amano la lettura ad alta voce e a volte ripetono a voce alta o parlano tra sé e sé mentre studiano. Possono avere difficoltà con i compiti scritti, mentre lavorano molto bene nelle situazioni di dialogo con altri studenti. Amano registrare e riascoltare le lezioni.
- *Stile Verbale/Non Verbale*: la nozione di apprendimento Verbale/Non Verbale deve essere applicata solo ad una preferenza per immagini, mappe, diagrammi, film e simili, e non può comprendere il linguaggio scritto.

- *Stile Cinestesico*: chi è orientato verso lo stile cinestesico ha bisogno di toccare oggetti e di essere in movimento. Questi studenti non riescono a concentrarsi se sono costretti a stare immobili per lungo tempo, amano prendere appunti ed essere coinvolti in varie attività durante le lezioni. Hanno spesso necessità di pause frequenti.

Identificare negli alunni la varietà di questi stili risulta cruciale in termini di risultati apprenditivi.

4.10.3 L'azione didattica volta all'interpretazione e alla modellizzazione

La bassa capacità di interpretazione e di conseguente modellizzazione dei quesiti oggetto delle prove INVALSI e OCSE PISA da parte dei nostri studenti è uno dei temi centrali del dibattito accademico in merito alla didattica della matematica.
La transizione bidirezionale tra matematica e realtà si è rivelata e si rivela assai problematica. Citando ancora una volta D'Amore (2007): "Così, un evento didattico diventa un insieme di fatti interpretabili dall'evoluzione di una situazione didattica. Tale interpretazione è uno degli scopi della didattica della matematica" (p. 364). In questo stesso articolo l'autore racconta di un semplice esercizio che solo il 23% degli alunni è riuscito a risolvere. Si tratta del celebre problema di Alan Schoenfeld (1987):

"Un bus dell'esercito trasporta 36 soldati. Se 1128 soldati devono essere trasportati in bus al campo d'addestramento, quanti bus devono essere usati?"

La stragrande maggioranza delle risposte sono state 31,3 o simili. Proprio dinanzi a queste risposte si comprende che manca la capacità di saper interpretare un numero (possono essere mai utilizzati 31,3 bus?).
La matematica non è solo la materia che insegna a fare i calcoli, ma è la materia che ci insegna anche, tra le altre cose, a saper interpretare i risultati ottenuti. La matematica è la chiave interpretativa del mondo che ci circonda; ma per poter capire ciò non solo bisogna essere in grado di saper *modellizzare* – ovvero tradurre la condizione del testo di un problema nello strumento matematico più opportuno -

ma successivamente bisogna anche saper interpretare i risultati ottenuti. Da qui la necessità di un metodo che induca a vedere la matematica per quello che è: un linguaggio interpretativo, un prezioso strumento nelle mani dell'uomo.
Bisogna saper rappresentare la realtà con lo strumento matematico più adeguato, e allo stesso tempo saper rappresentare il risultato ottenuto e comprenderlo nella realtà. Nell'aggettivo interpretativo si intende compresa anche la volontà di associare a ciascun argomento matematico la sua esigenza iniziale, il suo embrione, il suo aspetto storico-epistomologico. Un banale esempio è introdurre alla classe i numeri relativi dicendo: "Stamattina c'erano 4 gradi. La temperatura è calata di 10 gradi. Quanti gradi ci sono adesso?" mostrando come, nel corso della storia, ogni "settore" matematico non ha un'origine divina, ma solo ed esclusivamente umana; ogni aspetto della Matematica altro non è (è stato) che una risposta a una specifica esigenza passata. È proprio quando i numeri Naturali non bastavano più che sono nati quelli Relativi; ed è stato quando è arrivato il momento di dividere un numero più piccolo per un numero più grande che sono nate le frazioni (oppure quando il divisore non era contenuto un numero preciso di volte nel dividendo); etc.
Ciò si ritiene importante perché mostrando l'aspetto più pratico della matematica, essa potrebbe essere vista con minore ostilità e, anzi, con maggiore interesse. I ragazzi devono sapere che ogni aspetto della matematica ha un'origine ben precisa, è mirato ad un utilizzo, è derivato da un'esigenza e, della realtà, ne è solo un'affascinante un'interpretazione.
L'aspetto più legato alla capacità di modellizzazione è il salto, come già accennato, dall'esercizio al problema. Per risolvere i problemi, e dunque poter nel nostro caso modellizzare e matematizzare, Polya (1965) propone quattro tappe:

- *capire il problema*. Questo principio sembra così ovvio che spesso non è neanche menzionato, eppure gli studenti spesso non riescono a individuare le corrette procedure risolutive di un problema proprio perché non capiscono completamente, o anche in parte, il testo o la richiesta del problema;

- *elaborare un piano per la risoluzione*. Polya afferma che ci sono molti modi ragionevoli per risolvere i problemi. L'abilità dello studente sta nella scelta di una strategia appropriata e questa si affina risolvendo molti problemi;
- *eseguire il piano risolutivo programmato*. La fase esecutiva è generalmente più semplice di quella di individuazione delle strategie risolutive. In generale, tutto ciò che serve sono cura e pazienza, dato che si hanno le competenze necessarie per la risoluzione. È necessario seguire il piano stilato e se non dovesse funzionare sceglierne un altro migliore;
- *guardare indietro*. Polya sostiene che è importante soffermarsi di tanto in tanto e guardare ciò che è stato già fatto, cosa ha funzionato e cosa non ha funzionato. In questo modo si consentirà di prevedere quale strategia utilizzare per risolvere i problemi futuri.

Un altro nemico della risoluzione dei problemi, oltre alla concezione negativa che si ha della disciplina, è proprio quello di cui parla Polya nella prima tappa: capire il problema. Spesso non è vero che i ragazzi non sanno risolvere i problemi: accade sovente che, dopo aver spiegato loro meglio la traccia, vengano fuori delle buone idee; pertanto l'ostacolo che deriva dalla non comprensione del testo non va assolutamente sottovalutato.

Un'altra delle principali cause di difficoltà che incontrano gli studenti nel processo di risoluzione del problema si trova anche nella trasformazione della traccia in operazioni matematiche e in una corretta simbolizzazione, secondo Medina et al. (2014). Il problema è dunque, spesso, di astrazione o linguistico, ancor prima che logico.

Un modello è in effetti una rappresentazione astratta della realtà che include solo gli aspetti rilevanti allo scopo dello studio della stessa. La realtà viene cioè descritta con un certo livello di dettaglio, includendo nella rappresentazione solo quelle componenti e interazioni fra componenti che si ritengono necessarie allo scopo prefisso.

Lo scopo della creazione di modello quindi è quello di una sintesi, di una riduzione della realtà in un contesto più semplice ma sufficientemente rappresentativo per poterlo gestire.

Per superare questi ostacoli (comprensione del testo e simbolizzazione) possiamo tener presente quanto detto da Kintsch (1988), il quale distingue due tipi di rappresentazione mentale che si formano durante la lettura del testo di un problema: il *testo base* e un *Modello della Situazione*.

Il primo è legato al significato semantico del testo (se il testo parla di un albero, lo studente immagina un albero, se il testo parla di una scala, lo studente immagina una scala), mentre il secondo è una rappresentazione mentale della situazione descritta dal testo.

Per risolvere il problema non è necessario rappresentare il testo base se non il Modello della Situazione, con tutti i dati che emergono dal testo. Questo Modello della Situazione lo suggeriva anche lo stesso Polya (1965) quando forniva alcune orientazioni su come risolvere i problemi tra le quali:

- Fare una rappresentazione del problema;
- Ubicare i dati e l'incognita nel disegno;
- Verificare se il disegno costruito rappresenta davvero il problema;
- Risolvere il problema usando qualche procedimento matematico;
- Condividere la soluzione con i compagni giustificando il procedimento;
- Analizzare la soluzione con i compagni.

Nel voler lavorare sulla dimensione Risolvere Problemi, oltre a proporre alla classe i "giusti" problemi (ovvero non esercizi camuffati da problemi, ma quei quesiti che non siano di immediata risoluzione e che, quindi, richiedano un procedimento o una serie di procedimenti per essere risolti), si può pensare di insegnare loro a costruire il Modello della Situazione in modo da superare i problemi derivati dalla comprensione del testo (questo perché la costruzione del modello avviene gradualmente, man mano che leggiamo il testo, quindi fa da "binario" al giovane studente che si dirige verso la soluzione).

La direzione pare così di certo giusta, avallata anche dalle conclusioni dello studio sul "Risolvere i Problemi" (Salinas e Sgreccia, 2017) dove è possibile leggere: "*fare matematica è, basicamente, risolvere problemi…*" (p. 44).

CAPITOLO V

VALUTARE L'APPRENDIMENTO

5.1 Valutare l'apprendimento

La valutazione degli studenti è stata a lungo considerata una delle questioni chiave dell'educazione in quanto aiuta gli educatori a sapere se gli studenti apprendono ciò che viene loro insegnato. La valutazione degli studenti ha diversi scopi che includono: migliorare l'apprendimento degli studenti, stimolare e incoraggiare il buon lavoro degli studenti, comunicare il giudizio dell'insegnante sui progressi degli studenti e informare l'insegnante su ciò che gli studenti hanno e non hanno imparato. La valutazione è essenziale non solo per guidare lo sviluppo dei singoli studenti, ma anche per monitorare e migliorare continuamente la qualità dei programmi, informare coloro che accedono all'istruzione e i loro genitori e fornire prove di responsabilità a coloro che sono coinvolti nel processo. La valutazione degli studenti fornisce informazioni cruciali sul modo in cui gli studenti stanno imparando e su come migliorare il loro apprendimento. La valutazione non è da considerarsi un'operazione, bensì un processo. Essa è implicita al processo di apprendimento/insegnamento e ne costituisce il momento "intelligente".

C'è da sottolineare che tutto il processo è continuamente sottoposto ad un atto di valutazione per il quale si ricorre a vari strumenti che servono a fornire informazioni sistematiche di ritorno agli allievi rispetto al proprio andamento e a centrare l'attenzione sui punti di forza e quelli di debolezza. Questa fase del processo è chiamata "valutazione in itinere" o "valutazione formativa", proprio perché ha lo scopo principale di aiutare la formazione dell'allievo, attraverso il monitoraggio costante dell'apprendimento e dell'insegnamento. Una volta terminato l'intero percorso, vi è la fase della "valutazione finale", ultimo step che dovrebbe confermare le valutazioni in itinere fatte fino a quel momento e che riveste un ruolo essenziale per l'impostazione del lavoro dell'anno successivo. La valutazione serve a tenere sotto controllo il processo per migliorarlo e per consentire all'alunno di conseguire il maggiore successo possibile (Da Re, 2013).

Nell'istruzione, il termine valutazione si riferisce alla grande varietà di metodi o strumenti che gli educatori utilizzano per valutare, misurare e documentare i

progressi nell'apprendimento, l'acquisizione di abilità o le esigenze educative degli studenti. Le valutazioni sono in genere progettate per misurare elementi specifici dell'apprendimento, ad esempio il livello di conoscenza che uno studente ha già in merito al concetto o all'abilità che l'insegnante ha intenzione di insegnare o alla capacità di comprendere e analizzare diversi tipi di testi e letture, problemi, quesiti. Le valutazioni vengono anche utilizzate per identificare i punti deboli e i punti di forza dei singoli studenti in modo che gli educatori possano fornire supporto mirato e competente. In termini generali, la valutazione didattica è il processo di misurazione e documentazione di ciò che gli studenti hanno appreso. Idealmente, le valutazioni didattiche non consistono solo in semplici test. Se ben fatti, sono potenti strumenti di apprendimento per gli studenti e strumenti di valutazione per gli educatori. La valutazione didattica supporta gli insegnanti nell'azione di monitorare i progressi degli studenti in modo che possano identificare chiunque si trovi in difficoltà, fornendo assistenza e un feedback concreto agli alunni sulle proprie prestazioni, da poter utilizzare per migliorare ulteriormente conoscenze e abilità. La valutazione è un momento essenziale di tutto il processo di apprendimento in quanto fornisce motivazione agli studenti a fare sempre meglio, ad impegnarsi maggiormente e collaborare attivamente in classe. Pertanto, gli insegnanti fin da subito stabiliscono obiettivi e risultati di apprendimento e determinano i modi migliori per aiutare gli studenti a raggiungere i loro obiettivi. Bisogna, oltretutto, evidenziare il fatto che essa può essere utilizzata anche per valutare le prestazioni degli insegnanti e dei sistemi scolastici, nonché l'efficacia delle diverse pratiche di insegnamento.

La valutazione fornisce elementi di conoscenza fondamentali per regolare i piani delle attività didattiche ed educative ed eventualmente definire percorsi metodologici e didattici personalizzati adeguati alle caratteristiche particolari degli alunni. La valutazione, nel senso contemporaneo del termine, ha riferimenti a funzioni differenti e indipendenti o interdipendenti. Essa si può riferire al profitto degli alunni, ai livelli delle conoscenze acquisite, alle procedure messe in atto dagli insegnanti per il raggiungimento degli obiettivi previsti dalla programmazione didattica ed educativa, ai dati informativi sul singolo alunno, agli aspetti affettivi e relazionali, agli aspetti relativi all'identità, l'autonomia e le competenze raggiunti.

Il documento ministeriale sui criteri valutativi considera due aspetti principali della valutazione: la valutazione didattica, affidata ai docenti con giudizi e voti, e la valutazione di sistema che va affidata alle scuole e all'Istituto Nazionale per la valutazione dell'istruzione. Nell'ambito della valutazione didattica si possono distinguere tre tipi di valutazione: *diagnostica*, finalizzata all'individuazione in tutti gli alunni di punto di forza e punti di debolezza prima dell'inizio delle attività didattiche al fine di predisporre diverse modalità di insegnamento o attività di recupero e potenziamento per riqualificare metodologie di insegnamento; *formativa in itinere,* che si riferisce ai risultati conseguiti alla fine di un breve percorso di insegnamento o di una unità didattica, con l'obiettivo di fare il punto della situazione scolastica di ogni alunno e dell'intera classe, "recuperando" eventuali lacune, difficoltà attraverso appositi interventi scolastici; *sommativa*, per verificare il possesso dei saperi e delle conoscenze che hanno costituito l'oggetto delle attività di insegnamento ed effettuare un bilancio consuntivo delle attività scolastiche svolte dopo un certo arco di tempo (Costanzo, 2015).

La valutazione di sistema, invece, si pone, primariamente, l'obiettivo di migliorare la qualità dell'offerta formativa delle istituzioni scolastiche e migliorare gli apprendimenti degli studenti. L'iter legislativo che ha portato ad un siffatto sistema di valutazione è stato piuttosto lungo ed il suo momento più rilevante è stata l'emanazione del DPR 80/2013 attraverso cui è stato emanato il Regolamento sul Sistema Nazionale di Valutazione (SNV) finalizzato a migliorare la qualità dell'offerta formativa e degli apprendimenti. Il provvedimento definisce inoltre i soggetti coinvolti nella valutazione: l'Invalsi, ovvero l'Istituto nazionale per la valutazione del sistema educativo di istruzione e di formazione che assicura il coordinamento funzionale dell'SNV; l'Indire ed il contingente ispettivo. All'Invalsi è assegnato un ruolo di coordinamento del SNV e di predisposizione di protocolli, indicatori e strumenti atti alle procedure valutative; all'Indire è attribuita la funzione di accompagnamento e supporto alle istituzioni scolastiche; al contingente ispettivo compete la cura della valutazione del sistema partecipando ai nuclei di valutazione esterni previsti dal Regolamento. Inoltre concorrono all'attività di valutazione anche la Conferenza per il coordinamento funzionale dell'SNV e i nuclei di valutazione esterna. Il SNV fornisce i dati delle valutazioni agli Direttori degli

Uffici Scolastici Regionali ai fini della valutazione dei Dirigenti scolastici secondo gli indicatori individuati dall'Invalsi. La Valutazione di sistema si pone in modo integrato con le altre attività valutative dell'Invalsi. L'obiettivo è la trasparenza e l'accessibilità delle informazioni aggregate relative agli aspetti più significativi del sistema di istruzione, nonché comprendere a fondo lo stato di salute del sistema di istruzione, sviluppando appropriate strategie di controllo e miglioramento. La valutazione di sistema permette confronti sia temporali che territoriali. Va altresì sottolineata l'importanza dell'utilizzo dei dati forniti dall'Invalsi come base per l'autovalutazione e per eventuali azioni di miglioramento predisponendo ogni anno un rapporto sul sistema scolastico italiano volto a consentire un'analisi su base nazionale e una comparazione su base internazionale tenendo conto non solo dei livelli di apprendimento degli studenti ma anche degli indicatori di risultato delle singole scuole in base ai diversi contesti territoriali (Costanzo, 2015).

"La valutazione diviene ricerca sociale applicata che ha come scopo la riduzione della complessità decisionale attraverso la ricostruzione e l'analisi degli effetti diretti ed indiretti, attesi e non attesi, voluti e non voluti" (Bezzi, 2001, p. 60).

Quando si parla di valutazione di sistema ci si riferisce dunque ad un progressivo miglioramento della qualità formativa e degli apprendimenti, tenendo in stretta considerazione le tendenze generali in atto nel mondo della scuola. In tal senso, ci si rifà a indicatori di input, ovvero fattori che descrivono e spiegano il funzionamento del sistema e le risorse in esso investite, e indicatori di output e outcome, ovvero i risultati di apprendimento degli studenti.

5.1.1 La valutazione formativa

In sintesi, le fasi principali del processo valutativo sono: la *valutazione diagnostica* che si colloca nella fase iniziale del processo formativo e assolve lo scopo di analizzare le caratteristiche di ingresso di un allievo in relazione al percorso che deve compiere; la *valutazione formativa* che accompagna le diverse fasi del processo formativo e assolve lo scopo di fornire un feedback all'allievo e all'insegnante sull'evoluzione del processo formativo; la *valutazione sommativa* che tende a collocarsi nella fase conclusiva di un determinato percorso formativo assolvendo lo scopo di tirare le somme sui risultati conseguiti dall'allievo. Vi è

anche la *valutazione certificativa* che segue il percorso formativo e assolve lo scopo di attestare socialmente il conseguimento di determinati risultati da parte del soggetto, in funzione delle sue scelte successive o dell'inserimento nel mondo del lavoro (Castoldi, 2009). Di seguito uno schema riassuntivo (Fig 5.1).

Fig. 5.1 Valutazione - Schema riassuntivo

Per valutazione formativa si intende l'insieme di tutte quelle attività che insegnanti e studenti realizzano al fine di raccogliere informazioni da poter utilizzare per modificare la modalità di insegnamento e promuovere un migliore apprendimento (Heritage, 2010). La valutazione formativa si riferisce a una vasta gamma di metodi che gli insegnanti utilizzano per condurre valutazioni in progress della comprensione degli studenti, delle esigenze di apprendimento e dei progressi fatti durante una lezione, unità o corso. Le valutazioni formative aiutano gli insegnanti a identificare i concetti che gli studenti hanno difficoltà a comprendere, le abilità che hanno difficoltà ad acquisire o gli standard di apprendimento che non hanno ancora raggiunto in modo da poter apportare modifiche alle lezioni, alle tecniche didattiche e al supporto di cui si avvalgono. L'obiettivo generale della valutazione formativa è raccogliere informazioni dettagliate che possono essere utilizzate per migliorare in itinere sia il processo di insegnamento che di apprendimento. Ciò che rende una valutazione "formativa" non è la progettazione di un test, una tecnica o un'autovalutazione di per sé, ma il modo in cui viene utilizzata, vale a dire per aggiornare il processo di insegnamento in progress apportando eventuali modifiche all'apprendimento. Le valutazioni formative sono in genere differenti dalle valutazioni sommative, che vengono utilizzate per valutare i progressi e i risultati

dell'apprendimento degli studenti alla conclusione di uno specifico periodo di istruzione, di solito alla fine di un progetto, unità, corso, semestre, programma o anno scolastico. Molti educatori ed esperti ritengono che la valutazione formativa sia parte integrante di un insegnamento efficace in quanto, contrariamente alla maggior parte delle valutazioni sommative, che sono deliberatamente separate dal processo didattico, essa viene integrata nel processo di insegnamento e apprendimento. Le valutazioni formative aiutano primariamente gli insegnanti a identificare i bisogni e i problemi di apprendimento e in molti casi aiutano anche gli studenti a sviluppare una maggiore comprensione dei propri punti di forza e di debolezza. Quando gli studenti sono ben consci delle proprie conoscenze e di cosa invece hanno bisogno diventano maggiormente consapevoli e si assumono maggiori responsabilità sul proprio apprendimento e sui progressi accademici. Mentre la stessa tecnica o processo di valutazione potrebbe, in teoria, essere utilizzato per scopi formativi o sommativi, molte valutazioni sommative non sono adatte a scopi formativi perché non forniscono un feedback utile. Ad esempio, i punteggi dei test standardizzati potrebbero non essere disponibili per gli insegnanti per mesi dopo che i loro studenti hanno sostenuto il test (quindi i risultati non possono essere utilizzati per modificare le lezioni o insegnare e preparare meglio gli studenti), oppure le valutazioni potrebbero non essere specifiche o approfondite abbastanza per fornire a insegnanti e studenti le informazioni dettagliate di cui hanno bisogno per migliorare. In altre parole, a differenza della valutazione sommativa che rimanda alla documentazione e al giudizio su una fase dell'apprendimento, la valutazione formativa consente di rispondere ai seguenti quesiti: qual è la meta da raggiungere in questo percorso di apprendimento? dove mi trovo adesso? quali strategie possono aiutarmi a concludere questo percorso? (Shavelson, 2006).

Se si decide di ricorrere alla valutazione sommativa al termine di un'unità didattica o di uno specifico segmento didattico lo si fa per misurare o controllare il raggiungimento degli obiettivi di apprendimento, mentre si ha valutazione formativa quando gli insegnanti, sulla base delle informazioni raccolte, modificano la loro pratica didattica e, di rimando, le azioni a sostegno dell'apprendimento. Essa prevede quali saranno le azioni future (Torrance, 2001).

Vengono identificati cinque elementi distintivi della valutazione formativa: condividere le attese di apprendimento, domandare, comunicare il feedback, predisporre forme di auto-valutazione, predisporre forme di valutazione tra pari (Bennett, 2011).

Come strategia intenzionale di miglioramento scolastico, la valutazione formativa ha ricevuto crescente attenzione da parte di educatori e ricercatori negli ultimi decenni. In effetti, ora è ampiamente considerata una delle strategie didattiche più efficaci utilizzate dagli insegnanti e c'è un corpus crescente di letteratura e ricerca accademica sull'argomento. Le valutazioni formative sono anche componenti integranti dell'apprendimento personalizzato e di altre strategie educative progettate in base alle esigenze e agli interessi di apprendimento distinti dei singoli studenti (Calvani, 2007).

Volendo riassumere, le valutazioni formative sono valutazioni in corso dell'apprendimento degli studenti che vengono generalmente somministrate più volte durante un'unità, un corso o un programma scolastico. Lo scopo generale della valutazione formativa è quello di fornire agli educatori feedback in-itinere su ciò che gli studenti stanno imparando o meno, in modo che gli approcci didattici, i materiali didattici e il supporto scolastico possano essere modificati di conseguenza. Le valutazioni formative di solito non sono classificate e possono assumere una varietà di forme, da quiz e incarichi più formali a tecniche informali di interrogazione e discussioni in classe con gli studenti. Le valutazioni sommative vengono utilizzate per valutare l'apprendimento degli studenti al termine di uno specifico periodo di insegnamento, in genere alla fine di un'unità, corso, semestre, programma o anno scolastico. Le valutazioni sommative sono in genere valutate e classificate attraverso test, assegnazioni o progetti che vengono utilizzati per determinare se gli studenti hanno appreso ciò che avrebbero dovuto apprendere durante il periodo precedentemente definito. In generale, le valutazioni formative sono *l'apprendimento* perché gli educatori usano i risultati per modificare e migliorare le tecniche di insegnamento durante un periodo di istruzione, mentre le valutazioni sommative sono *di apprendimento* perché valutano i risultati scolastici al termine di un periodo di istruzione. In generale, al di là delle specifiche differenze tra le diverse funzioni valutative elencate in precedenza, coesistono due logiche di

fondo alla valutazione in ambito scolastico: da un lato una *logica di controllo*, finalizzata ad accertare ed attestare specifici risultati formativi, dall'altro una *logica di sviluppo*, finalizzata a potenziare il processo formativo stesso e i suoi risultati. La logica di controllo, riconoscibile come "valutazione dell'apprendimento", enfatizza la valutazione come dispositivo di accertamento della produttività dell'azione scolastica e di rendicontazione sociale dei suoi risultati. Di contro, la logica di sviluppo, riconoscibile come "valutazione per l'apprendimento" caratterizza la valutazione come dispositivo di retroazione, utile a coinvolgere il soggetto nel momento valutativo e ad accrescere la consapevolezza della sua esperienza di apprendimento (Castoldi, 2009).

5.1.2 Strumenti di valutazione autentica

In precedenza si è avuto modo di sottolineare come un curricolo innovativo debba basarsi su un sistema di coerenze interne tra progettazione, implementazione e valutazione degli apprendimenti e delle competenze acquisite. È stata evidenziata l'esigenza didattica di passare da forme trasmissive di conoscenze ad approcci di co-costruzione di apprendimenti significativi. Sono state evidenziate le caratteristiche degli apprendimenti significativi ed una loro coerente implementazione attraverso processi laboratoriali mirati all'elaborazione di prodotti dotati di autentico valore di uso sociale nel mondo reale. Si pone ora la necessità di una ulteriore e decisiva coerenza tra progettazione, implementazione e valutazione degli apprendimenti. Tre termini che sono strettamente uniti. La progettazione didattica infatti deve contenere tutti gli elementi inerenti la valutazione in modo da mantenere una certa connessione tra quest'ultima fase e tutto il processo di insegnamento e apprendimento. La valutazione, tuttavia, non rappresenta solo il momento finale dell'azione didattica ma funge da "navigatore" permanente per orientare lo svolgimento del percorso di insegnamento/apprendimento (AA., VV., 2009).

Per una valutazione di qualità occorre incoraggiare il ricorso a metodologie attive che rendano lo studente protagonista e co-costruttore del suo sapere attraverso il procedere per compiti di realtà, problemi da risolvere, strategie da trovare e scelte da motivare. È evidente, quindi, la necessità di rafforzare e implementare le

competenze degli alunni lungo tutto il loro percorso di studi. Per fare ciò, i docenti hanno l'occasione di implementare il loro essere ricercatori e sperimentatori di proposte, pratiche didattiche e di strumenti di valutazione con l'obiettivo di abbandonare un modello di didattica prevalentemente trasmissiva, basata sulla progettazione per obiettivi e sulla sola valutazione di contenuti appresi, ma piuttosto promuovere la connessione tra progettazione dei curricoli, azione didattica in classe, valutazione formativa e certificazione degli apprendimenti. In tal senso, una valutazione reale e autentica sarà particolarmente apprezzata. Ricerche recenti dimostrano che la valutazione degli studenti sta subendo profondi cambiamenti grazie alle riforme degli obiettivi e dei contenuti educativi, degli standard, del curriculum e dell'istruzione, della formazione degli insegnanti e delle relazioni tra genitori e contesti scolastici. Gli istituti sono ora incaricati di sviluppare pratiche di valutazione che riducano al minimo l'incertezza e la soggettività associate alla valutazione delle competenze degli studenti. Una di queste pratiche di valutazione degli studenti è la valutazione autentica dove gli studenti sono tenuti a svolgere un compito in completa autonomia e ad essere attivamente coinvolti nel processo di apprendimento, dimostrando un'applicazione significativa delle conoscenze e delle abilità essenziali. In altre parole, la valutazione autentica aiuta gli studenti a mettere in relazione i loro contenuti di apprendimento con situazioni significative che sono rilevanti per la loro vita. Wiggins (1998) definisce la valutazione autentica come:

> "engaging and worthy problems or questions of importance, in which students must use knowledge to fashion performances effectively and creatively. The tasks are either replicas of or analogous to the kinds of problems faced by adult citizens and consumers or professionals in the field" (p.32).

Wiggins (1993) propone infatti la prospettiva di una "valutazione alternativa" in sostituzione di quella tradizionale con l'obiettivo di verificare non solo ciò che uno studente sa, ma ciò che "sa fare con ciò che sa" fondata su una prestazione reale e adeguata dell'apprendimento. Una valutazione che si prefigge di essere autentica dovrebbe consentire di esprimere un giudizio più esteso dell'apprendimento e cioè della capacità "di pensiero critico, di soluzione dei problemi, di metacognizione, di efficienza nelle prove, di lavoro in gruppo, di ragionamento e di apprendimento permanente" (Arter, Bond, 1996).

Si parla quindi di valutazione autentica:

> "quando ancoriamo il controllo al tipo di lavoro che persone concrete fanno piuttosto che solo sollecitare risposte facili da calcolare con risposte semplici. La valutazione autentica è un vero accertamento della prestazione perché da essa apprendiamo se gli studenti possono in modo intelligente usare ciò che hanno appreso in situazioni che in modo considerevole li avvicinano a situazioni di adulti e se possono rinnovare nuove situazioni" (Wiggins, 1998).

La valutazione autentica ricorre continuamente nel contesto di un ambiente di apprendimento significativo e riflette le esperienze di apprendimento reale, un apprendimento contestualizzato e non più astratto. La finalità della valutazione autentica è quella di coinvolgere gli studenti in compiti che richiedono di applicare le conoscenze direttamente nelle esperienze del mondo reale. Questo tipo di valutazione scoraggia test e prove che si presentano sconnesse dalle attività di insegnamento e di apprendimento tratte dalle esperienze reali. Nella valutazione autentica, c'è un intento personale, una ragione a impegnarsi e un ascolto vero al di là delle capacità e competenze dell'insegnante (Winograd, Perkins, 1996).

La valutazione autentica procede sulla convinzione che l'apprendimento non si dimostra con l'accumulo di nozioni, teoriche e fini a se stesse, ma con la capacità di generalizzare, di trasferire e di utilizzare la conoscenza acquisita in contesti reali. Per tale ragione nella valutazione autentica le prove sono preparate in modo da richiedere agli studenti di utilizzare processi di pensiero più complesso, più impegnativo e più elevato. Questo procedimento consente agli studenti di raggiungere livelli più elevati di prestazione e prepararli a un inserimento di successo nella vita reale. La valutazione autentica offre la possibilità sia a insegnanti che a studenti di vedere a che punto stanno, di autovalutarsi al fine di migliorare il processo di insegnamento o di apprendimento: gli insegnanti hanno l'opportunità di sviluppare la propria professionalità e gli studenti di diventare autoriflessivi e assumere il controllo del proprio apprendimento (Comoglio, 2002). Secondo Wiggins (1993) le caratteristiche principali di una valutazione autentica sono le seguenti:

1. *è realistica*: il compito o i compiti replicano i modi nei quali la conoscenza della persona e le abilità sono "controllate" in situazioni di vita reale;
2. *richiede giudizio e innovazione*: lo studente deve usare la conoscenza e le abilità saggiamente e in modo efficace per risolvere problemi non strutturati,

ad esempio progettare qualcosa, la cui soluzione richiede di più che seguire una routine, una procedura stabilita o l'utilizzo concreto di una conoscenza;

3. *richiede agli studenti di "costruire" la disciplina*: invece di ridire, di riaffermare o di replicare attraverso una dimostrazione ciò che gli è stato insegnato o ciò che già conosce, lo studente deve portare a termine una esplorazione e lavora "dentro" la disciplina di scienze, di storia o dentro ogni altra disciplina;

4. *accerta l'abilità dello studente a usare efficientemente e realmente un repertorio di conoscenze e di abilità per negoziare un compito complesso*;

5. *permette appropriate opportunità di ripetere, di praticare, di consultare risorse e di avere feedback, nonché di perfezionare la prestazione e i prodotti*: per essere educativa una valutazione deve tendere a migliorare la prestazione degli studenti.

La valutazione autentica racchiude in sè qualsiasi tecnica che può essere utilizzata da educatori e docenti al fine di valutare la crescita professionale e personale degli studenti. È un passaggio dal modo tradizionale di valutare le conoscenze, le abilità e gli atteggiamenti degli studenti usando test, esami ed esperimenti ad una modalità che richiede agli studenti stessi di costruire la conoscenza. Il lavoro cognitivo che deve essere applicato è un'indagine disciplinata. Gli studenti dovrebbero impegnarsi nell'uso della conoscenza precedente per andare oltre tale conoscenza, stabilire relazioni tra pezzi di questa conoscenza per costruire una comprensione approfondita su un argomento ragionevolmente focalizzato, condurre il proprio lavoro ed esprimere le proprie conclusioni attraverso una comunicazione elaborata. Ciò suggerisce che un'autentica valutazione incoraggia gli studenti a sviluppare abilità analitiche; avere la capacità di integrare ciò che viene appreso; essere creativi; essere in grado di lavorare in modo collaborativo; sviluppare capacità di espressione scritta e orale.

Vediamo, secondo Wiggins (1996, pp. 26-28), le principali differenze tra una valutazione autentica e la valutazione tradizionale:

Authentic assessment	*Traditional assessment*
Richiede agli studenti di contestualizzare e applicare ciò che hanno appreso	Chiede agli studenti cosa hanno appreso lavorando sulla memorizzazione
Incoraggia gli studenti a lavorare all'interno di situazioni ambigue e di aree grigie presenti nel mondo reale	Incoraggia gli studenti a pensare ai problemi con un approccio "giusto o sbagliato"
Sfida gli studenti con una serie di compiti alla soluzione di problemi di vita reale	Tende a focalizzarsi su singole risposte ai problemi
Guarda alle abilità degli studenti di pianificare e rivedere performance e atteggiamenti	Raramente consente agli studenti di pianificare, valutare o rivedere le proprie performance
Spesso include problemi ambigui per consentire agli studenti di affrontare le ambiguità della vita reale	Frequentemente si concentra su competenze statiche e spesso arbitrarie

In generale, l'affermazione di nuove modalità di accertamento delle conoscenze ha spostato l'attenzione verso forme di valutazione più autentiche: l'espressione valutazione autentica è strettamente connessa ad ambienti di apprendimento aperti e flessibili che permettono agli attori di interpretare e di applicare le conoscenze apprese in nuovi contesti di vita reale. Le innovative forme di valutazione autentica spostano l'attenzione sul monitoraggio attivo delle conoscenze che favorisce processi di apprendimento significativi. Wiggins e McTighe (2004,) sostengono che:

> "una valutazione vera deve partire da e riferirsi a prestazioni autentiche, cioè a compiti contestualizzati in situazioni reali che richiedono tipicamente la presenza di un insieme di elementi caratteristici quali: obiettivi chiari, ruoli, situazioni contestuali, prodotto di prestazioni e standard di successo" (pp. 10-11).

Wiggins e McTighe (2004) hanno delineato un concetto di apprendimento in cui gli insegnanti della scuola si concentrano su tre obiettivi correlati per aiutare gli studenti ad acquisire informazioni e abilità importanti, dare un significato ad un contenuto specifico e trasferire efficacemente il loro apprendimento a nuove

situazioni sia all'interno della scuola che al di fuori di essa. Idealmente, gli insegnanti dovrebbero aiutare gli studenti a costruire le proprie conoscenze e competenze per prepararli in tutti gli aspetti dell'esperienza scolastica, compresa la valutazione. Affinché ciò avvenga, le valutazioni autentiche devono essere utilizzate ripetutamente e in numerosi contesti per valutare le prestazioni, consentendo agli insegnanti di "osservare i modelli di successo e insuccesso e le ragioni alla base" (pp. 36-37).

5.1.3 Pratiche didattiche per la Valutazione autentica

Le valutazioni tradizionali forniscono buoni dati, tuttavia la necessità di una valutazione autentica è più attuale. Strumenti e strategie di valutazione autentici consentono agli studenti di applicare l'apprendimento alle situazioni del mondo reale e aiutano gli insegnanti a tenere traccia dei progressi nel tempo. Le valutazioni sono autentiche quando l'apprendimento che misurano ha valore oltre il mero contesto “aula” ed è significativo per lo studente. La valutazione autentica affronta le competenze e le capacità necessarie per svolgere compiti reali, come già precedentemente evidenziato.

Fra le tecniche più utilizzate vi è la valutazione del *portfolio*, ovvero una raccolta di lavoro degli studenti nel tempo. Possono includere rubriche, documenti di ricerca, relazioni di libri, riviste, diari, fotografie, disegni, video e audio, abstract di letture, progetti di gruppo, risultati dei test. Il segno distintivo di un portfolio utilizzato per la valutazione è che i contenuti sono selezionati dallo studente (Hayes, 1994). In generale i contenuti della valutazione sono scelti in base a una serie di standard o obiettivi collegati al curriculum o all'evento di apprendimento. Dovrebbero rappresentare una storia documentata di apprendimento e una dimostrazione organizzata di realizzazione. I portfolio possono fungere da catalizzatore per la riflessione sulla crescita di uno studente e come mezzo per identificare le aree di miglioramento. Un portfolio è una raccolta sistematica che descrive le attività e i risultati di uno studente in una o più materie scolastiche. Il presupposto è che i portfolio siano utili come supporto ai nuovi approcci didattici che enfatizzano il ruolo dello studente nella costruzione di conoscenza e comprensione e il ruolo dell'insegnante nel promuovere l'apprendimento degli

studenti. L'uso di un portfolio di studenti nella valutazione migliora il coinvolgimento del docente e degli studenti nel processo di valutazione stesso. Si presume che la valutazione del portfolio degli studenti aumenti la motivazione, assista i docenti nel processo decisionale e sia efficace per segnalare risultati e progressi ai genitori. La ricerca ha dimostrato che gli studenti beneficiano dei portfolio in quanto rivelano i loro talenti e le loro abilità. Mentre gli studenti prendono parte allo sviluppo del loro portfolio, analizzando i criteri per ciò che costituisce un buon lavoro e imparando a valutare il proprio lavoro attraverso pratiche riflessive guidate, crescono e si sviluppano sia nelle loro conoscenze che nelle competenze. Tra i vantaggi dell'uso del portfolio, vi sono: promuovere l'autovalutazione, la riflessione e il pensiero critico degli studenti; misurare le prestazioni sulla base di campioni autentici di lavoro degli studenti; fornire flessibilità nel misurare il modo in cui gli studenti raggiungono i loro obiettivi di apprendimento; consentire a insegnanti e studenti di condividere la responsabilità di stabilire obiettivi di apprendimento e di valutare i progressi verso il raggiungimento di tali obiettivi; offrire agli studenti l'opportunità di avere un ampio contributo nel processo di apprendimento; facilitare le attività di apprendimento cooperativo, tra cui valutazione e tutoring tra pari, gruppi di apprendimento cooperativo; fornire opportunità a studenti e insegnanti per discutere degli obiettivi di apprendimento e dei progressi verso tali obiettivi in attività strutturate e non strutturate; abilitazione della misurazione di più dimensioni del progresso degli studenti includendo diversi tipi di dati e materiali. Il vantaggio principale di una valutazione del portfolio studenti è di promuovere un dialogo tra il docente e gli studenti i quali hanno l'opportunità di discutere del loro percorso ed essere incoraggiati a fissare obiettivi riguardanti ciò che è stato realizzato e ciò che deve essere fatto in futuro per sostenere i propri risultati. I portfolio degli studenti raccontano spesso storie avvincenti sulla crescita dei talenti degli studenti e mettono in mostra le loro abilità attraverso una raccolta di materiali autentici. In qualsiasi processo di creazione di un portfolio, gli studenti vengono incoraggiati a svolgere compiti autentici che mostrano l'applicazione delle conoscenze e delle abilità acquisite. In altre parole, la valutazione del portfolio fornisce un modo autentico di dimostrare abilità e risultati e incoraggia anche un'esperienza nel mondo reale che

richiede organizzazione, processo decisionale e metacognizione. Ciò suggerisce che qualsiasi valutazione del portfolio sarebbe considerata autentica poiché gli studenti riflettono sul proprio lavoro, si impegnano nell'autovalutazione e nella definizione degli obiettivi (Palm, 2008).

Le pratiche didattiche di valutazione autentica consistono dunque in un insieme di attività che concorrono tutte ad affrontare un problema concreto. Le prove di valutazione autentica sono dunque delle vere e proprie attività di apprendimento, nelle quali vengono coinvolte varie aree disciplinari. Fra queste, figura la rubrica di valutazione, attraverso la quale, ad esempio, il docente può precisare il proprio voto e l'allievo ricevere un feedback dettagliato sulla propria prestazione (Tacconi, 2011).

Riprendendo McTighe (1998), Comoglio (2002) definisce la rubrica come:

> "uno strumento generale di valutazione impiegato per valutare la qualità dei prodotti o delle prestazioni in un determinato ambito o un elenco di linee guida che specificano gli elementi che contraddistinguono la qualità di una prestazione" (p.100).

Si tratta di uno strumento che, in vista di una prestazione complessa, definisce il compito "reale" ancorando i criteri della valutazione a precisi riferimenti. La rubrica:

> "se adoperata con trasparenza e condivisione, può realmente portare a sperimentare momenti di autovalutazione nel segno della metaconoscenza, autostima, autocoscienza, fiducia, a rendere dunque attivo il soggetto in apprendimento, consapevole delle proprie potenzialità, delle proprie attitudini e capace di elaborare le proprie difficoltà" (Aglieri, 2005, p. 28).

Data una certa prestazione complessa, la costruzione di tale rubrica procederà attraverso l'individuazione e la corretta collocazione dei seguenti elementi: *dimensioni*, ovvero le caratteristiche che identificano una certa prestazione o le "possibili" dimensioni attribuibili al compito di una composizione scritta come idee e contenuto, organizzazione e così via; *criteri*, che definiscono ciò che si intende apprezzare all'interno delle singole dimensioni; *descrittori*, che definiscono gli elementi di controllo di un criterio; *indicatori*, che prescrivono segnali specifici dell'esistenza di un certo grado di "possesso di una dimensione"; *àncore*, ovvero esempi, tratti da esperienze reali o verosimili, grazie ai quali rapportare costantemente la valutazione a delle buone pratiche. Posizionate tali dimensioni

sulla linea verticale della tabella, sulla linea orizzontale apparirà invece una scala per graduare la prestazione richiesta da un livello minimo a un livello massimo. Le rubriche, oltre che presentare differenti gradi di complessità, sono sempre sottoponibili a revisione, che andrà condivisa tra i soggetti coinvolti nella valutazione e che dunque prevede momenti di confronto, coinvolgimento e partecipazione rispetto all'azione didattica. Le rubriche in genere contengono due importanti funzionalità: identificano e chiariscono specifiche aspettative e criteri di rendimento e specificano i vari livelli di rendimento degli studenti. Nella loro forma più semplice, le rubriche sono liste di controllo che richiedono una semplice risposta, "sì" o "no". Rubriche più complesse includono invece standard scritti delle prestazioni previste per gli studenti con diversi livelli di indicatori a seconda, appunto, della prestazione raggiunta. Esistono differenti tipologie di rubriche ma la maggior parte di esse rientra nelle due categorie, olistica o analitica. Le rubriche olistiche considerano le prestazioni come una totalità, con l'obiettivo principale di ottenere una visione globale delle prestazioni, in genere su compiti complessi o progetti importanti. Al contrario, le rubriche analitiche sono progettate per concentrarsi su aspetti più specifici delle prestazioni ed il loro scopo è fornire un feedback specifico sul livello di prestazione di ciascuna dimensione valutata, con il vantaggio di fornire un'analisi dettagliata del comportamento o della prestazione. Queste rubriche rilevano i punti di forza e di debolezza e identificano le aree per un eventuale perfezionamento. Le rubriche di entrambi i tipi possono essere utilizzate in modo appropriato per la valutazione del prodotto e del processo, nonché per la valutazione formativa e sommativa. È anche importante notare che le rubriche sono in genere sviluppate e utilizzate come dispositivi di comunicazione aperti (Castoldi, 2009).

I vantaggi dell'utilizzo delle rubriche sono numerosi sia per gli studenti che per gli insegnanti, come ad esempio consentire alla valutazione di essere più obiettiva e coerente, focalizzare l'attenzione del valutatore sugli importanti risultati con un valore assegnato per ciascuno demistificando le aspettative per lo studente e assegnando valori per ciascun risultato atteso, consentendo agli studenti di identificare i punti di forza e di concentrarsi su aree deboli fornendo al contempo l'opportunità di rivisitarle. Inoltre essa incoraggia gli insegnanti a identificare i

comportamenti critici necessari per il completamento dell'attività e di stabilire i criteri per l'esecuzione in termini specifici, incoraggiando gli studenti a sviluppare una consapevolezza circa criteri che devono dimostrare nelle loro prestazioni, nonché i criteri che possono utilizzare per valutare le proprie capacità e prestazioni. Le rubriche promuovono l'enfasi sulla valutazione formativa e sommativa, fornendo parametri di riferimento su cui misurare e documentare i progressi, riducendo l'ansia degli studenti su ciò che ci si aspetta da loro, ma garantendo loro che il lavoro verrà giudicato con lo stesso metro e dunque incoraggiandoli verso prestazioni di alta qualità. Ci sono anche alcuni svantaggi relativi, ad esempio, alle tempistiche di utilizzo e sviluppo delle stesse o ai criteri e gli standard che non sono stati sufficientemente identificati o sviluppati. Una volta chiariti i criteri, resta ancora molto lavoro da fare per identificare chiaramente gli indicatori chiave che verranno utilizzati per valutare i vari livelli di conseguimento per ciascuno dei criteri. Questo è il lavoro complesso richiesto da una valutazione solida, chiara e significativa. Le aspettative devono essere chiarite e quindi il livello di raggiungimento dei vari obiettivi deve essere descritto e comunicato chiaramente (Marzano, Pickering, McTighe, 2012).

Le rubriche sono strumenti importanti sia per l'insegnamento che per la valutazione in quanto possono migliorare le prestazioni degli studenti, oltre a monitorarle, rendendo chiare le aspettative degli insegnanti e mostrando agli studenti come soddisfare tali aspettative. Il risultato è spesso un notevole miglioramento della qualità del lavoro degli studenti e dell'apprendimento stesso. Pertanto, ricorrere alle rubriche aiuta a definire la "qualità" sia del processo di insegnamento che del processo di apprendimento.

Una delle dimensioni più entusiasmanti, ma spesso ancora poco utilizzate, della valutazione autentica è l'autovalutazione da parte dello studente, ovvero “quell’insieme di modalità attraverso cui un individuo è chiamato a valutare la propria esperienza di apprendimento, il proprio apprendimento, le proprie prestazioni e a riconoscerne i significati personali attribuiti” (Panadero, Brown, Strijbos, 2016).

Gli studenti vogliono ricevere informazioni sulla propria prestazione e sulle attività svolte e, ancora di più, vogliono sapere quanto e cosa sono riusciti ad ottenere. Nella

valutazione tradizionale, gli studenti devono attendere che i test post-performance siano stati valutati per ricevere il feedback. Nelle classi in cui si utilizza una valutazione alternativa, gli studenti sono incoraggiati a impegnarsi nell'autovalutazione e a collaborare con gli insegnanti per rivedere le prestazioni e decidere le fasi successive del processo di apprendimento. Uno degli aspetti chiave dell'autovalutazione degli studenti riguarda i criteri, o gli standard, che sono disponibili in diverse forme. Nella valutazione "autoreferenziale", gli studenti valutano le prestazioni alla luce dei propri obiettivi, desideri e risultati precedenti e diventano così più consapevoli delle prestazioni attuali e dei passi che devono essere fatti per estendere il proprio apprendimento. In questo tipo di autovalutazione, gli standard sono incorporati nel sistema di valori e gli obiettivi intrinseci degli studenti. Nell'autovalutazione "riferita agli standard", gli studenti confrontano le proprie caratteristiche di prestazione con standard o criteri stabiliti. Le capacità di autovalutazione rappresentano un'abilità critica e significativa ma, c'è da sottolineare, che questo tipo di attività di autovalutazione autentica e formale è rara nella maggior parte delle scuole dove gli studenti raramente hanno l'opportunità di valutare le proprie prestazioni, poiché gli insegnanti hanno assunto il ruolo primario di valutatori. Cosa accadrebbe invece se gli studenti potessero essere realmente abilitati a impegnarsi in un'autovalutazione significativa? E se il luogo dell'autorità nel processo di valutazione potesse essere spostato da insegnante a studente? E se gli studenti avessero voce in capitolo nello sviluppo e nella valutazione del proprio apprendimento? Se l'apprendimento è costruzione attiva e consapevole da parte del soggetto che apprende, in un contesto sociale, il momento auto-riflessivo e metacognitivo assume una particolare rilevanza. La valutazione non va vista solo come azione dei docenti, ma anche come dimensione che è opportuno far maturare negli allievi. I soggetti che imparano a valutare e a valutarsi sono soggetti che apprendono meglio. Si tratta di stimolare negli allievi forme di vera e propria auto-valutazione, avviando processi di meta-riflessione sui contenuti e sui processi, che li aiutino a diventare maggiormente consapevoli di ciò che imparano e dei metodi che possono facilitare l'apprendimento. In tutto questo diventa cruciale il dialogo che si instaura tra docente e allievi (Tacconi, 2011).

In tal senso, l'autovalutazione è particolarmente utile se prevede il coinvolgimento del soggetto valutato durante tutto il ciclo di gestione della performance. Fattore chiave dell'autovalutazione è il suo orientamento al miglioramento ed il suo importante contributo alla bontà e completezza della valutazione della performance. Essa non dovrebbe essere vista come un semplice processo di comparazione e validazione, ma come una fonte critica di informazioni sulla performance. Tuttavia, spesso si evidenzia una bassa correlazione tra i risultati dell'autovalutazione e quelli di altre modalità valutative. Per tale ragione, essa dovrebbe concentrarsi sull'analisi di specifici elementi della performance e non sulla determinazione di un livello complessivo che dovrebbe invece essere stabilito considerando i contributi di sistemi diversi.

Tra le forme emergenti di valutazione in ambito scolastico, oltre l'autovalutazione, vi è la valutazione tra pari, ovvero quell'insieme di modalità attraverso cui "un individuo è chiamato a valutare e fornire feedback relativamente al lavoro dei propri pari, nonché a riceverne a sua volta da questi ultimi in merito al proprio lavoro" (Nicol et al., 2014, p. 104) Sia l'autovalutazione che la valutazione fra pari possono offrire agli studenti i seguenti benefici: miglioramento delle capacità di pensiero critico, maggiore senso di responsabilità per il proprio apprendimento, miglioramento della motivazione, opportunità di osservare e imparare come i pari affrontano lo stesso problema, opportunità di ricevere un rapido feedback in merito alle loro prestazioni e comprensione della teoria e dei concetti chiave. Tuttavia, nonostante questi aspetti positivi, entrambe le forme di valutazione non sono ampiamente utilizzate in ambito scolastico, probabilmente a causa dei timori riguardo alla loro affidabilità o validità, mancanza di capacità degli insegnanti di attuare tale valutazione e riluttanza degli studenti a "criticare", a dover emettere un giudizio sui loro compagni di classe. l feedback provenienti da diverse fonti, come tutor o docenti, può migliorare notevolmente il processo di apprendimento degli studenti i quali rappresentano però anche un'altra fonte di feedback e la valutazione che avviene tra pari può offrire una serie di benefici educativi. La valutazione tra pari implica che gli studenti si scambino feedback per valutare il proprio lavoro o le proprie prestazioni utilizzando criteri pertinenti. Boud, Cohen e Sampson (2001) discutono i meriti della valutazione tra pari e suggeriscono che può far parte di

un'importante strategia nel repertorio di approcci all'insegnamento e all'apprendimento. La valutazione tra pari può essere utilizzata in modo più favorevole, piuttosto che semplicemente consentire agli studenti di valutarsi a vicenda. Roberts (2006) si riferisce alla valutazione tra pari come un processo che consente agli studenti di riflettere criticamente sull'apprendimento dei loro pari: essa è anche un processo reciproco in quanto lo studente che fornisce feedback trae beneficio anche dall'aumentare la propria comprensione e la propria prestazione.

Vediamo di seguito un esempio di scheda di autovalutazione (Fig 5.2):

Nome Attività: .....

Allievo/a ..... Classe .....

La **cosa più importante che ho imparato** in questa Attività è stata...	.....
Altre cose che **ho imparato** in questa Attività sono state...	.....
La **difficoltà più grande** che ho avuto in questa Attività è stata...	.....
Altre **difficoltà** che ho avuto in questa Attività sono state...	.....
La **cosa più importante su cui devo migliorare** è...	.....
Altre **cose su cui devo migliorare** sono...	.....
La **cosa che mi è piaciuta di più** di questa Attività è...	.....
Altre **cose che mi sono piaciute** di questa Attività sono...	.....
La **cosa che mi è piaciuta di meno** di questa Attività è...	.....
Altre **cose che non mi sono piaciute** di questa Attività sono...	.....

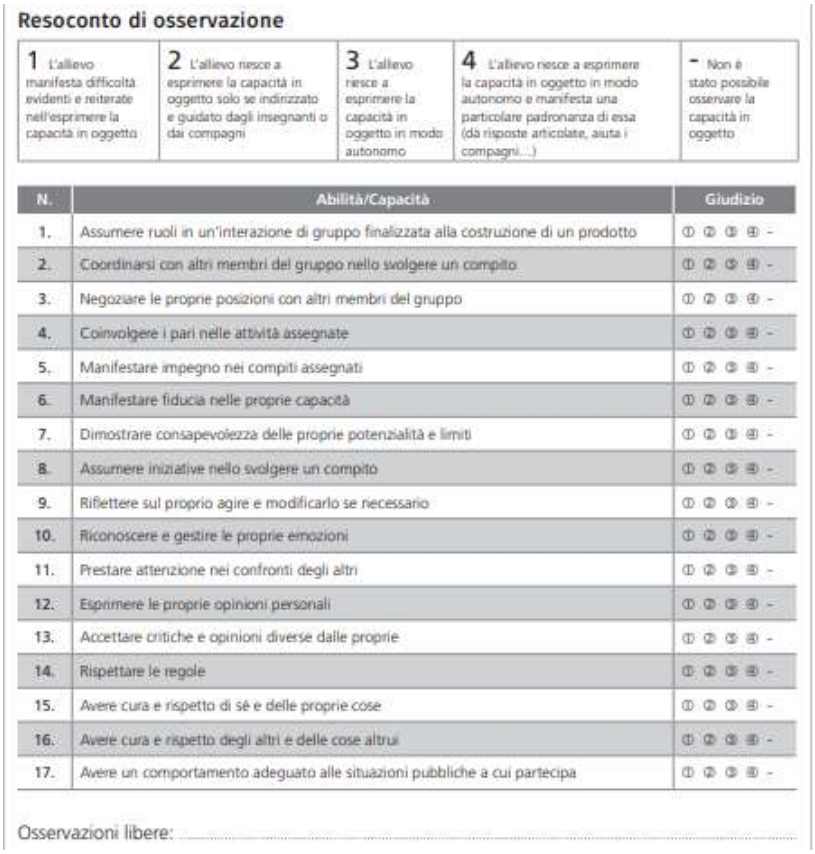
Fig. 5.2: Scheda di autovalutazione (Fonte: Trinchero, Costruire e certificare competenze nel secondo ciclo, 2018)

Esistono tre aspetti o concetti importanti che dovrebbero accompagnare qualsiasi tipo di valutazione autentica: connessione, riflessione e feedback. Una caratteristica chiave di molte di queste strategie di valutazione autentica è che gli studenti sono tenuti a collegare fatti, concetti e principi insieme in modi unici per risolvere

problemi di vita reale. A sostegno di questo tipo di valutazione, la ricerca cognitiva ha messo in discussione la convinzione che l'apprendimento e il trasferimento dell'apprendimento avvengano semplicemente accumulando e memorizzando frammenti di informazioni. Questo tipo di valutazioni autentiche sono quasi sempre inquadrate sotto forma di esperienze di apprendimento, in genere sequenziali, da semplici a complesse, e di natura progressiva. Un compito importante che gli insegnanti dovrebbero assolvere è quello di aiutare gli studenti a collegare le conoscenze e le abilità apprese in compiti precedenti e quindi estenderli a compiti correlati o più complessi. Numerosi strumenti cui la valutazione si avvale, consentono agli studenti di collegare, o sintetizzare, ciò che hanno imparato portandoli a produrre prodotti finiti, a risolvere problemi e completare attività e progetti. La gamma di opzioni disponibili per gli insegnanti che desiderano migliorare la valutazione degli studenti si estende oltre i settori cognitivo e psicomotorio per includere la valutazione di atteggiamenti e altri comportamenti affettivi. L'elemento chiave qui è aiutare gli studenti a sviluppare la consapevolezza di sé e delle proprie capacità riflessive. Gli studenti a cui viene insegnato come riflettere sull'apprendimento usando strategie di riflessione metacognitiva dovrebbero essere in grado di monitorare, valutare e migliorare le proprie capacità di pensiero e apprendimento. Un altro risultato importante della valutazione autentica ha a che fare con il fornire feedback agli studenti in relazione a obiettivi significativi. Wiggins osserva che molti insegnanti credono erroneamente di fornire feedback con punteggi dei test e commenti codificati. Gli studenti hanno invece bisogno di informazioni che li aiutino ad auto-valutarsi e ad auto-correggersi affinché la valutazione venga integrata durante l'esperienza di apprendimento. Wiggins traccia una sottile, ma importante, distinzione tra guida e feedback. La guida fornisce indicazioni, è in genere avviata dall'insegnante e tende a essere prescrittiva. Al contrario, il feedback coinvolge attivamente lo studente rendendo il processo valutativo anche collaborativo e riflessivo, ovvero l'insegnante e lo studente diventano partner nel processo di apprendimento. Figurativamente, le tecniche di feedback sono quelle esperienze che aiutano gli studenti a vedere se stessi e le loro prestazioni in modo più chiaro. Durante tutto il processo di valutazione, agli studenti vengono fornite informazioni in tempo reale sulla qualità

delle loro prestazioni. Wiggins (1998) osserva che il feedback è più simile a un commento in corso piuttosto che a una misurazione finale e permette di monitorare, non etichettare o censurare, le prestazioni degli studenti. Da questa prospettiva di feedback, l'enfasi si sposta dalla "misurazione" come obiettivo finale alla "valutazione" come processo continuo.

La sfida per gli insegnanti è impegnarsi a cambiare il modo in cui insegnano e valutano gli studenti, nonché a impegnarsi per sviluppare e utilizzare strategie di valutazione alternative come quelle appena descritte. Ogni sforzo dovrebbe essere fatto per sviluppare compiti significativi e autentici di apprendimento e generare una valutazione che miri alle conoscenze, alle abilità e agli atteggiamenti necessari per l'apprendimento e la vita reale. Gli insegnanti devono anche imparare a organizzare e strutturare questi compiti in modo che siano contestualizzati, integrativi, flessibili e aperti all'autovalutazione e alla valutazione tra pari. Inoltre, è necessario mantenere una chiara focalizzazione su standard e criteri in modo da prevedere procedure formative e sommative. Gli studenti dovrebbero essere incoraggiati a partecipare attivamente al processo di valutazione attraverso la riflessione metacognitiva, stabilendo criteri e indicatori di prestazione richiesti per sviluppare rubriche di punteggio efficaci e usando questi strumenti di valutazione per valutare il proprio lavoro. Un feedback efficace è la chiave per migliorare l'apprendimento degli studenti. Vediamo di seguito un esempio di Griglia di osservazione per le interazioni di coppia e di gruppo ed una Griglia di valutazione tra pari (Fig. 5.3):



Resoconto di osservazione

1	2	3	4	-
L'allievo manifesta difficoltà evidenti e reiterate nell'esprimere la capacità in oggetto	L'allievo riesce a esprimere la capacità in oggetto solo se indirizzato e guidato dagli insegnanti o dai compagni	L'allievo riesce a esprimere la capacità in oggetto in modo autonomo	L'allievo riesce a esprimere la capacità in oggetto in modo autonomo e manifesta una particolare padronanza di essa (dà risposte articolate, aiuta i compagni…)	Non è stato possibile osservare la capacità in oggetto

N.	Abilità/Capacità	Giudizio
1.	Assumere ruoli in un'interazione di gruppo finalizzata alla costruzione di un prodotto	① ② ③ ④ -
2.	Coordinarsi con altri membri del gruppo nello svolgere un compito	① ② ③ ④ -
3.	Negoziare le proprie posizioni con altri membri del gruppo	① ② ③ ④ -
4.	Coinvolgere i pari nelle attività assegnate	① ② ③ ④ -
5.	Manifestare impegno nei compiti assegnati	① ② ③ ④ -
6.	Manifestare fiducia nelle proprie capacità	① ② ③ ④ -
7.	Dimostrare consapevolezza delle proprie potenzialità e limiti	① ② ③ ④ -
8.	Assumere iniziative nello svolgere un compito	① ② ③ ④ -
9.	Riflettere sul proprio agire e modificarlo se necessario	① ② ③ ④ -
10.	Riconoscere e gestire le proprie emozioni	① ② ③ ④ -
11.	Prestare attenzione nei confronti degli altri	① ② ③ ④ -
12.	Esprimere le proprie opinioni personali	① ② ③ ④ -
13.	Accettare critiche e opinioni diverse dalle proprie	① ② ③ ④ -
14.	Rispettare le regole	① ② ③ ④ -
15.	Avere cura e rispetto di sé e delle proprie cose	① ② ③ ④ -
16.	Avere cura e rispetto degli altri e delle cose altrui	① ② ③ ④ -
17.	Avere un comportamento adeguato alle situazioni pubbliche a cui partecipa	① ② ③ ④ -

Osservazioni libere: .....

Fig. 5.3: Griglia di valutazione (Trinchero, Costruire e certificare competenze nel secondo ciclo, 2018)

5.2 Per un agire competente

Alla luce delle riflessioni avanzate nei capitoli precedenti, si definisce "competente" lo studente che si mostra in grado di mobilitare i propri saperi per "leggere" certe situazioni ed assegnare a esse il corretto significato, ovvero ricorrere ad un repertorio vasto e flessibile di strategie per affrontarle, riflettere sulle proprie interpretazioni e azioni e modificarle quando lo si ritiene necessario. Laddove lo studente si ritrovi ad affrontare situazioni nuove ed inedite all'interno di contesti che lo obbligano ad attuare determinate scelte, riflettendo sulla loro bontà ed adeguatezza, mette in atto un agire competente affiancando alle proprie conoscenze ed abilità tutto un insieme di strutture mentali che lo aiutino a utilizzarle in modo opportuno (Trinchero, 2018).

Tali modelli mentali "competenti" consentono di interpretare una data situazione, assegnarvi senso e, di conseguenza, prendere decisioni pertinenti ed eseguire azioni

efficaci in risposta alla situazione stessa. Per fare ciò, è necessario selezionare tutta una serie di strategie che consentono, peraltro, di rivedere in itinere le sue scelte, interpretazioni ed azioni, modificandole qualora queste non dovessero rivelarsi adeguate nel corso degli eventi. All'interno di un "agire competente" vi sono quattro elementi da dover considerare (pp. 7-8):

- la quantità e la qualità di Risorse **(R)** possedute e mobilitabili, in termini di conoscenze, abilità e capacità personali, sociali e/o metodologiche, unite all'adeguatezza di queste alla situazione-problema da affrontare;
- strutture di interpretazione **(I)** ovvero i modelli, espliciti o impliciti, che guidano l'interpretazione della situazione-problema da parte del soggetto e la conseguente scelta delle strategie da mettere in atto. Una corretta "visione della situazione" consente di ridefinire il problema osservandolo dalla prospettiva del soggetto competente;
- strutture di azione **(Z)** ovvero le concrete strategie operative che il soggetto mette in atto per raggiungere gli scopi che si prefigge, in presenza di una data situazione o di un determinato problema;
- Strutture di autoregolazione **(A)** ovvero le capacità autoriflessive e autoregolative del soggetto di capire, in itinere, se le strategie adottate sono effettivamente le migliori possibili e di cambiarle opportunamente in caso contrario.

Secondo Trinchero (2018) le quattro componenti della competenza emergono quando il soggetto si trova di fronte a dei problemi. Al termine di una puntuale ricognizione dell'acquisizione delle competenze da parte dei discenti, si tiene conto: delle strutture di interpretazione, con descrittori di competenza effettivamente osservabili; delle strutture di azione, con le operazioni che gli studenti avrebbero dovuto porre in essere per affrontare il compito; delle strutture del sé, con i descrittori di competenza effettivamente rilevabili. Di seguito i descrittori (Fig. 5.4):

	Descrittori del modello R-I-Z-A	*Descrizione dettagliata della prestazione:*
Interpretazione (descrittori di percezione, capacità passive)	*Cogliere* … (elementi chiave, collegamenti e relazioni, …)	Percepire in un insieme di elementi (mediante l'attenzione selettiva) gli elementi di interesse, non scelti soggettivamente ma definiti da una consegna data all'allievo (es. "Cogliere gli elementi principali in un brano": l'allievo legge il brano e stabilisce mediante la propria comprensione quali elementi debbano ritenersi inerenti ad un tema o ad un obiettivo dato dalla consegna che deve soddisfare).
	Identificare … (dati e incognite, obiettivi, punti non chiari, …)	Percepire in un insieme di elementi (mediante l'attenzione selettiva) gli elementi che presentano caratteristiche identiche a quelle di un modello che l'allievo ha in mente (es. "Identificare il soldato romano in un insieme di rappresentazioni di soldati dell'antichità": l'allievo deve riconoscere il soldato - anche se non l'ha mai visto prima in quella forma - sulla base delle immagini di soldati romani che ha già visto, stabilendo l'esistenza di una similitudine figurativa tra gli elementi che caratterizzano il soldato, quali ad esempio elmo, scudo, spada, calzari, …, e quelli che conosce).
	Individuare … (elementi chiave, collegamenti e relazioni, risorse necessarie, …)	Percepire in un insieme di elementi (mediante l'attenzione selettiva) quelli che rispettano determinate caratteristiche o criteri (es. "Individuare in un testo le forme verbali composte": l'allievo deve isolare i verbi dal resto del testo e tra questi isolare quelli retti da un ausiliare).
	Localizzare … (informazioni, concetti, …)	Percepire la collocazione spaziale di qualcosa o qualcuno oppure l'area interessata da un fenomeno (es. "Localizzare le aree geografiche in cui si è sviluppata la civiltà Ittita": l'allievo deve esaminare le mappe e isolare mentalmente i territori in questione).
	Riconoscere … (situazioni problematiche, informazioni date e informazioni mancanti, …)	Associare un elemento informativo dato ad uno dei modelli già noti (es. "Riconoscere l'oggetto illustrato e denominarlo": l'allievo ha già in memoria l'immagine dell'oggetto e deve recuperarne il nome dalla stessa; "Riconoscere il soldato romano tra gli esempi di soldati presentati": l'allievo ha già visto il soldato romano rappresentato esattamente in quella forma e quindi lo associa al modello presente nella sua memoria).
	Scegliere … (le risorse più opportune, …)	Isolare in un insieme di elementi quelli che a proprio avviso rispondono a determinati criteri soggettivi, senza applicare un processo sistematico (es. "Scegliere gli algoritmi secondo voi più opportuni per risolvere un problema di calcolo": il soggetto opera una scelta sulla base di criteri soggettivi, esplorati in modo euristico e non sistematico).
	Selezionare … (le risorse più opportune, …)	Isolare in un insieme di elementi quelli che soddisfano un insieme di criteri esterni dati, applicando un processo sistematico (es. "Selezionare le teorie in grado di spiegare un fenomeno dato": il soggetto deve esaminare una per una le teorie disponibili ed estrarre quelle che soddisfano un insieme di criteri oggettivi ed espliciti che gli sono stati forniti).
aZione (descrittori di esecuzione, capacità attive)	*Analizzare* … (contenuti, processi, …)	Scomporre un materiale in parti costituenti (o estrarre delle parti da un insieme) e riorganizzarle in una forma differente in base ai propri scopi (es. "Analizzare un problema di matematica": il soggetto deve dire quali sono le informazioni principali nel problema e quali quelle di sfondo, quali tra le informazioni principali sono i dati e quali sono le incognite, quali tra i dati sono effettivamente rilevanti e quali non sono rilevanti per la soluzione del problema, quali sono le conoscenze di matematica utili per risolverlo, ecc.; oppure "Analizzare un testo descrittivo": il soggetto deve dire quali sono le informazioni esplicite/manifeste e quelle non esplicite/ricavabili, dire quali sono i fatti e quali sono le opinioni, dire quali sono gli assunti, le ipotesi, i metodi, i dati e le conclusioni, ecc.).
	Attribuire … (punti di vista, posizioni di autori differenti, …)	Verbalizzare i punti di vista, le posizioni, i valori di fondo, gli intenti dei comunicanti, presenti in un materiale anche collegandoli ad una teoria o pensiero di un soggetto (es. "Attribuire una dichiarazione ad un personaggio o scuola di pensiero": il soggetto deve estrarre punti di vista e posizioni dai materiali dati riconducendole ad un filone di pensiero conosciuto).
	Calcolare … (applicando algoritmi, …)	Determinare una grandezza facendo uso di operazioni matematiche (es. "Calcolare l'area della seguente figura": il soggetto deve utilizzare i dati a sua disposizione per ricavare quelli eventualmente mancanti, anche attraverso stime opportune, e con questi risolvere il problema).
	Classificare … (contenuti, processi, soluzioni, …)	Inserire elementi (oggetti, eventi, concetti, asserti, problemi, situazioni) all'interno di categorie fissate a priori, derivanti da una classificazione monodimensionale (es. "Oggetti di forma triangolare") o multidimensionale (es. "Oggetti di forma triangolare e di colore verde"), in base ad associazioni non puramente mnemoniche ma riferite alle caratteristiche distintive degli oggetti appartenenti alla categoria (es. "I triangoli hanno tre lati") o caratteristiche prototipali (es. "Gli oggetti inseribili nella categoria 'matite'

		hanno le seguenti caratteristiche distintive: …").
	Confrontare … (contenuti, processi, soluzioni, strategie, …)	Osservare con attenzione due o più elementi (oggetti, eventi, concetti, asserti, problemi, situazioni) allo scopo di identificare corrispondenze "uno a uno" tra di loro. Le corrispondenze possono riguardare: a) biunivocità fra oggetti, es. piatti-posate, bicchieri-bottiglie; b) inclusione tra categorie, es. la categoria "gatti" è inclusa nella categoria "felini"; c) collocazione spaziale (es. sopra-sotto, dentro-fuori, vicino-lontano) e temporale (es. prima-dopo, breve-prolungato, ieri-poco fa); d) comparazione dimensionale, es. grande-piccolo, largo-stretto, lungo-corto, alto-basso, ecc.; e) ordine tra elementi (seriazione) sulla base di determinati criteri, es. grandezza, lunghezza, ecc.; f) quantificazione, ossia corrispondenza tra un simbolo numerico e la molteplicità di un insieme di oggetti.
	Costruire … (prodotti, …)	Mettere insieme e comporre prodotti materiali o immateriali, utilizzando determinati saperi e soddisfacendo determinati requisiti (es. "Costruire una piramide con le seguenti caratteristiche …", "Costruire un sito Web che rispetti i seguenti requisiti …").
	Descrivere … (oggetti, processi, soluzioni, …)	Riprodurre verbalmente o per iscritto uno o più segmenti di informazione (verbale, visuale, uditiva, gestuale) memorizzata rievocandola dalla propria memoria o ricostruendola sulla base di un insieme strutturato di stimoli (es. "Descrivere gli eventi principali della Rivoluzione francese", "Descrivere un apparato elettronico di amplificazione di un segnale audio").
	Dimostrare … (soluzioni, …)	Riprodurre verbalmente i passaggi logici compiuti per giungere da delle premesse a delle conclusioni (es. "Dimostrare che due figure hanno la stessa area", "Dimostrare che l'affermazione X è errata").
	Eseguire … (procedure, …)	Mettere in atto una procedura (ossia una sequenza univoca di passi ordinati che portano ad un risultato predeterminato) allo scopo di risolvere un compito routinario, familiare per il soggetto che la mette in atto (es. "Eseguire una procedura di ordinamento dei dati a disposizione sulla base del criterio X").
	Formulare … (piani di azione, strategie, soluzioni, …)	Esplicitare una o più procedure allo scopo di raggiungere determinati obiettivi (es. "Formulare una soluzione ad un problema dato").
	Ideare … (soluzioni, strategie, …)	Enunciare idee e procedure originali (non rintracciabili nella stessa forma nei materiali studiati) allo scopo di scoprire relazioni non date e nuove implicazioni (es. "Ideare una soluzione per un problema, sulla base di criteri e vincoli dati", "Ideare una rappresentazione alternativa per un problema dato", "Ideare una scorciatoia in grado di abbreviare il processo di inferenza per passare da un'idea ad un'altra", "Ideare un modo per estendere regole costruite a partire da una data situazione ad una situazione differente").
	Ipotizzare … (soluzioni, strategie, …)	Enunciare ipotesi di soluzione a problemi dati e strategie da sperimentare allo scopo di giungere a determinati obiettivi (es. "Ipotizzare una soluzione geometrica ad un problema algebrico").
	Organizzare … (contenuti, processi, eventi, …)	Mettere insieme e comporre vari elementi (oggetti, concetti, eventi, comportamenti) allo scopo di realizzare una struttura coerente (es. "Organizzare i concetti estratti da un testo in una mappa concettuale"), combinando selettivamente gli elementi stessi, determinandone le connessioni, stabilendo gerarchie, imponendo una logica all'insieme e determinando la funzione delle singole parti.
	Pianificare … (sequenze di azioni, processi, strategie, …)	Utilizzare elementi dati ed elementi generati ex-novo con la propria creatività per definire una procedura atta ad adempiere ad un compito, identificando i passi necessari e la corretta sequenza (es. "Pianificare una strategia per raggiungere l'obiettivo X").
	Produrre … (prodotti, …)	Mettere in atto un piano definito allo scopo di costruire un prodotto, materiale o immateriale (es. "Produrre un elaborato su un tema dato").
	Progettare … (soluzioni, strategie, …)	Stendere un progetto inerente un'opera, materiale o immateriale, specificandone i dettagli tecnici (disegni, calcoli, studi necessari alla sua realizzazione, ecc.) necessari alla sua realizzazione (es. "Progettare un sito Web che soddisfi determinate caratteristiche").
	Rappresentare graficamente … (contenuti, processi, problemi, soluzioni, strategie, …)	Realizzare un disegno, collage, schema o qualsiasi altra rappresentazione che metta in gioco linguaggi visuali allo scopo di rendere i significati associati ad un insieme di concetti e asserti relativi ad un dato dominio conoscitivo (es. "Rappresentare graficamente i passaggi principali della Rivoluzione Francese").
	Realizzare … (prodotti, elaborati, …)	Rendere "reale" (ossia fisicamente o virtualmente esperibile, un'idea o un progetto) attraverso la creazione di un prodotto materiale o immateriale (es. "Realizzare un dipinto").
	Riassumere … (contenuti, processi, …)	Astrarre il tema centrale o il punto principale da un testo, da un evento, da un'esperienza, riassumendone il significato in un unico concetto o asserto, in grado di rendere il significato del tutto (es. "Riassumere il significato di un testo letto in una sola frase").
	Ricavare … (implicazioni, conclusioni, sintesi, …)	Trarre un qualcosa da un insieme di elementi dati, applicando un processo di inferenza, deduzione o induzione logica (es. "Ricavare una conclusione da un insieme di premesse").
	Riformulare … (problemi, soluzioni,	Tradurre informazioni presentate in una data forma in una forma diversa,

	strategie, …)	utilizzando lo stesso formalismo (es. "Riformulare con parole proprie i contenuti presenti in un testo").
	Spiegare … (fenomeni, processi, …)	Ricostruire ed esplicitare nessi causa-effetto (anche appoggiandosi a una o più teorie già conosciute) allo scopo di chiarire perché si è verificato un dato evento, ricomponendo la catena causale che lo ha reso possibile o che lo ha generato (es. "Spiegare perché è accaduto il fatto X", "Spiegare perché in determinate condizioni le piante producono ossigeno").
	Tradurre da un formalismo ad un altro … (contenuti, processi, …)	Volgere informazioni ricevute in una data forma in una forma diversa, utilizzando un formalismo differente (es. "Tradurre in forma grafica i contenuti presenti in un testo", "Tradurre la formula X in linguaggio Javascript").
	Trovare esempi di … (contenuti, processi, …)	Esplicitare esempi di oggetti appartenenti ad una data categoria concettuale (es. "Trovare esempi di mammiferi che vivono nella savana").
	Trovare similarità e differenze in … (contenuti, processi, …)	Esplicitare un insieme organizzato di elementi (proprietà, caratteristiche, principi, …) che non variano e un insieme organizzato di elementi che variano in una serie di oggetti, eventi, concetti o materiali di studio (es. "Trovare le similarità che legano i seguenti oggetti … e le differenze che invece li caratterizzano").
	Utilizzare un modello per … (risolvere un problema, …)	Adottare un modello esplicito allo scopo di raggiungere un obiettivo dato (es. "Utilizzare il calcolo algebrico per risolvere il seguente problema …", "Utilizzare il paradigma … per coniugare il verbo …", "Utilizzare una griglia di criteri per valutare il prodotto di un vostro compagno").
	Utilizzare una procedura per … (risolvere un problema, …)	Adottare una procedura esplicita allo scopo di raggiungere un obiettivo dato (es. "Utilizzare la seguente ricetta … per cucinare una torta", "Utilizzare il seguente diagramma sequenziale … per controllare la correttezza di questa soluzione al problema …", "Utilizzare la seguente procedura … per trovare incongruenze nel prodotto di un vostro compagno").
	Argomentare … (le proprie proposte, le proprie soluzioni, le strategie applicate nella risoluzione di un problema, …)	Produrre una comunicazione persuasiva, orale o scritta, allo scopo di convincere l'interlocutore della bontà delle "buone ragioni" alla base delle scelte compiute nello svolgere un dato compito (es. "Argomentare le ragioni alla base della propria soluzione al problema X").
Autoregolazione (descrittori di riflessione, capacità metacognitve)	*Chiarificare* … (le proprie proposte, le proprie soluzioni, le strategie applicate nella risoluzione di un problema, …)	Esplicitare o dettagliare maggiormente punti del proprio elaborato (o del processo che ha portato alla sua costruzione) che altri soggetti hanno giudicato "non chiari", producendo una comunicazione tale da soddisfare le richieste dell'interlocutore (es. "Chiarificare le scelte fatte nel risolvere un problema").
	Criticare … (le proprie proposte, le proprie soluzioni, le strategie applicate nella risoluzione di un problema, …)	Rilevare le incoerenze tra un prodotto (o il processo che lo ha generato) e un insieme di criteri espliciti atti a valutarne la qualità (es. "Criticare la propria soluzione al problema X per stabilirne l'appropriatezza, la congruenza con gli obiettivi, il rispetto delle priorità, la qualità relativa in relazione ad altre soluzioni sulla base dei criteri forniti").
	Difendere … (le proprie proposte, le proprie soluzioni, le strategie applicate nella risoluzione di un problema, …)	Ribattere alle critiche che altri soggetti hanno formulato al proprio elaborato o al processo che ha portato alla sua costruzione (es. "Difendere il proprio elaborato in un dibattito con il docente e con i pari").
	Giudicare … (le proprie proposte, le proprie soluzioni, le strategie applicate nella risoluzione di un problema, …)	Assegnare un giudizio ad un proprio prodotto (o al processo che lo ha generato) sulla base di un insieme di criteri espliciti atti a valutarne la qualità (es. "Giudicare il proprio elaborato sulla base di un sistema esplicito di assegnazione dei punteggi").
	Giustificare … (le proprie proposte, le proprie soluzioni, le strategie applicate nella risoluzione di un problema, …)	Esplicitare le "buone ragioni" alla base delle scelte compiute nello svolgere un dato compito (es. "Giustificare le scelte fatte nel risolvere il problema X"), senza necessariamente produrre una comunicazione persuasiva.
	Motivare … (le proprie proposte, le proprie soluzioni, le strategie applicate nella risoluzione di un problema, …)	Esplicitare dettagliatamente le scelte compiute nello svolgere un dato compito (es. "Motivare le scelte fatte nel risolvere il problema X"), senza necessariamente esplicitare le "buone ragioni" alla base delle stesse.
	Trovare errori … (nelle proprie proposte, nelle proprie soluzioni, nelle strategie applicate nella risoluzione di un problema, …)	Esaminare un proprio elaborato allo scopo di esplicitare i punti in cui non viene rispettata la coerenza interna (es. "Trovare incoerenze nel proprio elaborato") o esterna (es. "Trovare punti del proprio elaborato che non rispettano i criteri dati").

Fig. 5.4: descrittori Modello Riza (Trinchero, Define learning outcomes in terms of processes and contents: the cognitive operations, 2022)

Il soggetto competente è dunque colui che, di fronte a un problema nuovo, mobilita le sue risorse, cerca di cogliere gli aspetti chiave del problema, ne formula una corretta interpretazione, agisce in modo opportuno per tentare una soluzione, riflette su ciò che sta facendo argomentando le proprie ragioni, cambiando le proprie

interpretazioni ed azioni sulla base di ciò che esperisce. L'esperienza lo mette in grado di accettare e affrontare la complessità dell'ambiente esterno, di interagire con esso ed accogliere le opportunità che esso offre. Il soggetto competente sarà dunque in grado di sviluppare la capacità di trovare, selezionare, valutare "buone" informazioni e usarle in modo opportuno per i propri scopi. La missione, dunque, della scuola si è trasformata ed evoluta rispetto al passato: diventa ora necessario regolare saperi e costruire le capacità degli allievi, ovvero prepararli ad apprendere per tutta la vita e ad acquisire un atteggiamento positivo e aperto verso la crescita personale, l'impegno, il pensiero critico, la cittadinanza attiva, il rispetto delle differenze. La scuola delle competenze non è solo una scuola che insegna le cose, ma una scuola che insegna a ragionare sulle cose, a comprenderle, provando anche a cambiare la realtà, mettendola in discussione attivando le proprie strategie e modelli di pensiero. L'apprendimento situazionale è proprio quello che riesce a far emergere le proprie potenzialità e i propri limiti, lavorando su di essi (Trinchero, 2018).

I tradizionali metodi di insegnamento che si basano e che dipendono dall'indottrinamento e dalla memorizzazione senza comprensione e applicazione nella vita reale ostacolano l'apprendimento della matematica indebolendo, negli studenti, la capacità di sviluppare modi di pensiero e di ragionamento. Conseguentemente, il livello di rendimento diminuisce a causa della loro mancanza di comprensione e della loro visione negativa della matematica, nonché di un insegnamento astratto senza applicazione reale e situazioni di vita quotidiana. Numerosi studi indicano che le istituzioni educative ancora considerano l'apprendimento un processo individuale separato dall'implementazione delle attività da parte degli studenti, che porta a ricevere conoscenza e concentrarsi su informazioni astratte al di fuori dei contesti di vita. L'apprendimento è definito da vari pedagogisti, tra cui Vygotsky, Piaget e Dewey, come il processo di assimilazione della conoscenza da parte dello studente attraverso la scoperta o l'interazione con il contesto esterno fatto anche di persone esperte che sanno motivare ed ispirare all'apprendimento. Significa anche la capacità dell'individuo di partecipare a nuove attività, svolgere nuovi compiti e padroneggiare nuovi concetti. L'apprendimento dal punto di vista dei sostenitori della teoria che

interagiscono in essa in modo sperimentale o reale pratico attraverso un ambiente sociale in cui comunicano attivamente e attraverso di esso acquisiscono conoscenza. Le conoscenze matematiche acquisite nel contesto della matematica scolastica sono utilizzabili e applicabili al di fuori della scuola in contesti del mondo reale e, in tal senso, i ricercatori affermano che gli studenti imparano quando partecipano ad attività utilizzando sia strumenti che un linguaggio situazionale, ovvero quando si spostano dal livello principiante al livello esperto, e dal ruolo secondario al ruolo principale nel lavoro proposto dal docente. Alcune ricerche confermano inoltre che l'interazione nasce tra gli studenti quando questi esprimono liberamente le proprie idee e partecipano attivamente alle discussioni durante lo svolgimento delle attività che devono essere collaborative al fine di supportare la costruzione della conoscenza, capacità di pensiero di ordine superiore e soluzioni multiple, nonché indirizzare gli studenti a identificare i loro problemi ed esprimere le loro conoscenze, a condizione che abbiano tempo sufficiente (Zahner et al., 2021).

Il ruolo dell'insegnante nell'ambiente di apprendimento situato è determinato nella progettazione e preparazione delle attività e dei relativi strumenti, e nel lavorare come facilitatore dell'apprendimento e come membro della comunità di apprendimento. Si presume inoltre che se lo studente acquisisce conoscenza utilizzando un materiale in un contesto specifico, sarà più facile recuperare la conoscenza in un contesto simile, ma potrebbe anche non essere in grado di recuperarla in contesti diversi o potrebbe non recuperarla affatto.

Alla luce di quanto sopra, l'apprendimento situato avviene quando il docente propone una situazione di vita reale all'interno della comunità-classe e a seconda dei bisogni degli studenti. Entrambi, studenti e insegnante, costruiscono una comunità che consiste appunto di loro come individui e il luogo in cui il l'esperienza o l'attività che rappresenta la situazione verrà applicata in modo pratico, con tutti gli strumenti necessari forniti. Inoltre, durante l'implementazione dell'attività o dell'esperimento, vengono scambiate conoscenze ed esperienze, il che rende gli studenti più informati attraverso la discussione, l'espressione e il chiarimento di idee e opinioni diverse e attraverso l'implementazione dell'attività e la sua reale applicazione al fine di acquisire le conoscenze richieste e applicare queste

conoscenze in contesti simili. Ciò richiede che la scuola riveda il suo ruolo di "dispensatrice di conoscenze" in favore di un ruolo di promozione della capacità degli studenti di dare senso alla varietà delle loro esperienze. È necessario, in tal senso, concepire nuovi modelli di organizzazione del lavoro in classe che partano dalle preconoscenze (e misconcezioni) dei ragazzi e li conducano verso percorsi di riflessione sistematica e generativa, motivandoli a richiamare, esplorare, problematizzare ciò che già sanno interandolo con ciò che manca, in termini sia di processi di pensiero sia di contenuti (Trinchero, 2018).
La circolarità della didattica viene così costruita e pensata (Fig. 5.5):

Fig. 5.5: Didattica circolare (Trinchero, Costruire e certificare competenze nel secondo ciclo, 2018)

L'apprendimento esperienziale apporta numerosi vantaggi alla didattica ed alle metodologie di apprendimento in generale nonchè all'insegnamento della matematica in particolare perché aiuta a sostenere il potenziale delle conoscenze e delle abilità degli studenti, così come gli atteggiamenti di apprendimento positivi collegando fra sè i due aspetti della conoscenza: teoria e pratica. L'apprendimento esperienziale, secondo Kolb (2014, p. 85), è "... il processo mediante il quale la conoscenza viene creata attraverso la trasformazione dell'esperienza personale". L'esperienza di base e l'esperienza universale, secondo Dewey (1993), sono le due categorie in cui l'esperienza può essere suddivisa. Le esperienze sono essenzialmente una raccolta di attività casuali o partecipazione a eventi. D'altra

parte, l'esperienza universale si verifica dopo un processo disciplinato di indagine riflessiva, integrato con l'esperienza precedente e la considerazione mirata delle esperienze future. In questo senso, l'apprendimento esperienziale è un processo di apprendimento attivo gestito dallo studente attraverso la partecipazione diretta, supportato dall'esperienza, dall'analisi e dalla riflessione. L'apprendimento esperienziale incoraggia gli studenti a pensare in modo critico e creativo, indagare, porre domande, prendere decisioni e applicare ciò che hanno appreso durante le attività. L'acquisizione delle abilità e la formazione delle conoscenze da parte degli studenti è il risultato della loro partecipazione diretta alle esperienze, e queste esperienze aiutano un ulteriore sviluppo degli studenti facendo leva sul loro potenziale. Tra i modelli di apprendimento esperienziale, vi è quello proposto da Pfeiffer e Jones, il cui ciclo parte da un determinato problema che presenta le seguenti caratteristiche: aperto, significativo, né eccessivamente semplice né eccessivamente complicato, da risolvere da soli senza tuttavia escludere un'interazione fra gli studenti stessi (Fig. 5.5).

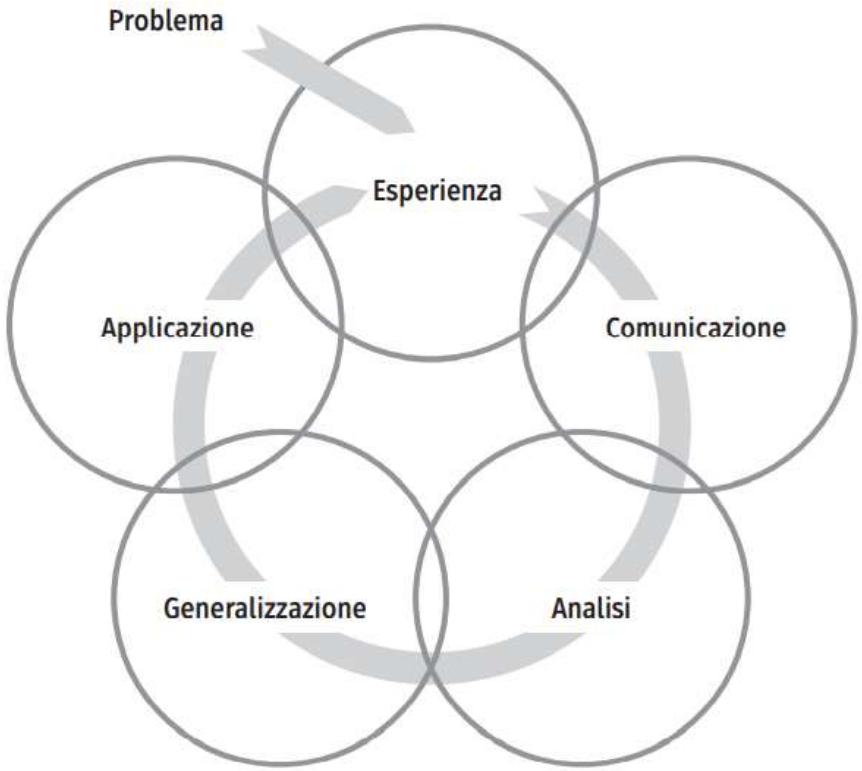


Fig. 5.5: Apprendimento esperienziale (Trinchero, Costruire e certificare competenze nel secondo ciclo, 2018)

Il discente viene coinvolto in un'attività attraverso un’esperienza iniziale che costituisce la base per l'intero processo. La fase successiva è la comunicazione, ovvero la condivisine delle proprie osservazioni con altri che hanno sperimentato la stessa attività. A questa fase segue l’analisi durante la quale le osservazioni, che sono state precedentemente condivise e integrate, vengono elaborate o riflesse. Successivamente, la fase di generalizzazione viene utilizzata per definire, chiarire ed elaborare le esperienze del discente. Il passaggio finale consiste nell'applicare i risultati dell'esperienza in un ambiente nuovo o a una situazione. L'applicazione di questa nuova esperienza di per sé ricomincia il ciclo (Pfeiffer e Jones, 1997).

5.3 Il ciclo di apprendimento esperienziale in Matematica: alcune esperienze didattiche

Al fine di approfondire e riflettere sull’applicabilità del metodo precedentemente esposto, ovvero il ciclo di apprendimento esperienziale, nella matematica studiata nella scuola secondaria di secondo grado, presenteremo di seguito alcune esperienze e laboratori, nonché spunti per elaborare attività finalizzate al raggiungimento delle competenze descritte dall’asse matematico.
Trinchero (2018, pp. 63-66) ne esemplifica alcune:

Competenza di base - A. Utilizzare le tecniche e le procedure del calcolo aritmetico e algebrico, rappresentandole anche sotto forma grafica	
MA1	Avete due schede telefoniche. Quella dell'operatore Megafone vi offre telefonate verso gli altri operatori a 15 centesimi di scatto alla risposta e 9 centesimi al minuto per la conversazione. Quella dell'operatore Gim, vi offre telefonate verso gli altri operatori a 5 centesimi di scatto alla risposta e 12 centesimi al minuto per la conversazione. Con quale scheda vi conviene fare telefonate della seguente durata: 1 minuto, 2 minuti, 3 minuti, 4 minuti, 5 minuti?
MA2	Dovete colorare una parete della vostra stanza (forma …, dimensioni …) con delle piastrelline adesive colorate (forma …, dimensioni …). Sulla parete è presente una finestra (forma …, dimensioni …, profondità …) e a terra vi è uno zoccolo alto … cm. Quante piastrelline vi servono per colorarla tutta (incluso il vano finestra)?
MA3	Un gruppo di amici, con due automobili, deve raggiungere una località di vacanza, partendo dal punto segnato sulla mappa (allegata) come "Partenza" e arrivando al punto segnato come "Arrivo". L'autista della prima auto dice: "Non conviene fare l'autostrada, perché è più lunga. Io percorrerò la statale". L'autista della seconda auto invece percorrerà l'autostrada. Sapendo che nessuno dei due supererà i limiti di velocità che sono: …, dite chi dei due impiegherà meno per giungere a destinazione e perché.
MA4	Sapendo che i consumi delle due auto dell'esercizio precedente sono … e che il pedaggio è pari a …, dite quale delle due auto avrà costi inferiori per il viaggio e perché.
MA5	State per partire per qualche giorno di vacanza e volete registrare alcuni programmi che vi interessano. Il problema è che potete soltanto programmare perché inizi e termini la registrazione dopo un certo numero di ore e minuti a partire dal momento in cui date il via (ad esempio, inizia a registrare tra 10 ore e 15 minuti, fermati tra 11 ore e 30 minuti, ricomincia tra 15 ore e 20 minuti…). Leggete il manuale fornito, che riporta diversi modi per programmare, e formulate le istruzioni necessarie per registrare i seguenti programmi: ….
MA6	State organizzando la vostra festa di compleanno e volete invitare … amici. Potete spendere la cifra di … euro per comprare … Sapendo che i costi sono …, progettate un piano di acquisto.
MA7	Ordina i seguenti esseri viventi sulla base della loro lunghezza, dal più piccolo al più grande. Avrai bisogno delle potenze del 10. Se non conosci la lunghezza degli esseri viventi elencati, cerca informazioni su di loro in Internet. Dopo averli ordinati, spiega perché hai avuto bisogno delle potenze del 10 per risolvere questo problema.

MA8	In un videogioco, il pirata Skull deve puntare un cannone per colpire un bersaglio. Skull può regolare la forza di tiro e l'angolo di fuoco del cannone, ma deve tenere conto anche della velocità e della direzione del vento. Calcolate quella che, secondo voi, è la traiettoria migliore, poi provala sul videogioco.
MA9	Sono le 9 di sera e Mario deve tornare a casa con il suo ciclomotore. Deve percorrere … km su una strada dove l'unico benzinaio che c'è è chiuso. Ha ancora a disposizione … nel serbatoio una quantità di carburante compresa tra … e … litri. Sapendo che la curva del consumo del suo ciclomotore in funzione della velocità che tiene è la seguente: …, quale velocità deve tenere Mario per essere sicuro di arrivare a casa? A che ora arriverà?
MA10	Quanto costa 1 kg di pane artigianale? Calcolatelo tenendo conto del costo della materia prima (farina, acqua, lievito, sale, olio, malto, miglioratore) e del costo energetico (per il riscaldamento del forno e il funzionamento delle attrezzature di laboratorio). Dopo averlo stabilito, calcolate il costo di 100 kg dello stesso pane.
MA11	Le traiettorie di due missili seguono le seguenti equazioni …: **a.** determinate dove si intersecano le due curve in almeno due modi diversi; **b.** giustificate le vostre risposte da un punto di vista sia algebrico sia geometrico; **c.** stabilite quale dei due missili potrebbe colpire il bersaglio B partendo dalla posizione P ed evitando l'ostacolo O, come schematizzato nella figura seguente: …
MA12	Organizzate un torneo di calcio a 5 con 4 squadre. Stabilite: **a.** il calendario, con un girone di andata e uno di ritorno in modo che ogni squadra disputi lo stesso numero di partite in casa e in trasferta; **b.** il costo dell'iniziativa pensando di dover affittare il campo, fornire a tutti i partecipanti le magliette e assegnare un premio alla prima squadra classificata; **c.** un prezzo del biglietto per il pubblico e/o eventuali sponsorizzazioni di aziende (i loro marchi verranno stampati sulle magliette) in modo da coprire le spese sostenute, effettuando simulazioni di situazioni differenti, con il vincolo di eguagliare i costi e i ricavi.
MA13	Leggete le seguenti quattro offerte per la connessione a Internet dello smartphone: … Trasformate le quattro offerte in equazioni e dite quali offerte sono più convenienti per le seguenti tipologie di utenti … motivando la vostra risposta.
MA14	Avete in mano una piastrina metallica forata di massa 20 g e una tabella contenente le caratteristiche chimico-fisiche di alcuni materiali. Rilevatene le dimensioni con righello e calibro, rappresentatela graficamente con tutte le quote necessarie e il relativo errore e stabilite il materiale da cui è composta, sulla base della tabella delle caratteristiche chimico-fisiche dei materiali. Scrivete una relazione riassuntiva che descriva la piastrina e il lavoro che avete fatto per modellizzarla.
MA15	Quanto è diffusa la raccolta differenziata dei rifiuti tra le famiglie dei ragazzi della vostra scuola? Realizzate un questionario, distribuitelo chiedendo di compilarlo in forma anonima, costruite una matrice dei dati con le risposte ottenute, descrivete i risultati ottenuti in una relazione scritta contenente grafici e tabelle e controllate statisticamente la seguente ipotesi "Le famiglie in cui i genitori sono mediamente più giovani seguono maggiormente la pratica della raccolta differenziata".

Competenza di base - B. Confrontare e analizzare figure geometriche, individuando invarianti e relazioni	
MB1	Queste due figure: … hanno la stessa area. Spiegate perché.
MB2	Questo è un campo di baseball: … Quali figure geometriche riconoscete? Sapendo che le dimensioni regolamentari di un campo di baseball devono rispettare le seguenti regole: …, progettate un campo di baseball da costruire sul terreno illustrato in figura. Fate attenzione: dovete prevedere anche gli ingressi e le uscite delle tribune sul lato strada. Spiegate poi le scelte fatte e giustificatele.
MB3	Questo oggetto si chiama "sestante": … Veniva usato dai marinai sulle navi per "fare il punto" sulla mappa, ossia capire dove si trovava la nave, prima dell'invenzione del Gps. Il sestante funziona così: … Se, ad esempio, le indicazioni del sestante sono queste: …, dove si trova la nave su questa mappa?

MB4	Nelle Terre di Gondor, dopo un lungo periodo di pace, la popolazione è cresciuta a dismisura ed è ormai impellente il problema della densità abitativa. Data la seguente carta delle Terre di Gondor con le relative province, la descrizione delle loro caratteristiche e i dati sociodemografici, calcolate la densità abitativa di ciascuna provincia (dovrete stimarne la superficie) e progettate un piano per incentivare la popolazione delle province più densamente popolate a spostarsi in province con caratteristiche analoghe ma meno popolate.
MB5	Progettate su carta millimetrata un murales da realizzare sulle pareti di una scuola dell'infanzia del vostro Comune, che spieghi ai bambini le principali figure geometriche sotto forma di gioco. Potete utilizzare i seguenti personaggi-guida: … Calcolate il costo dei materiali per la realizzazione del murales servendovi di questi volantini di colorifici della zona: … e scegliendo le offerte migliori.
MB6	State allestendo un bar. Collocate gli arredi e le attrezzature necessarie (descritti nelle seguenti schede: …) nel locale schematizzato nella seguente piantina: … Dovrete tenere conto dei vincoli di spazio, dei vincoli normativi e della necessità di creare postazioni di lavoro ergonomiche.
MB7	Utilizzando Google Earth e Google Street View, analizzate la porzione di territorio urbano indicata e componete una planimetria sulla base dei dati che avete a disposizione. Corredate la planimetria con una relazione che motivi le scelte compiute.

Competenza di base - D. Analizzare dati e interpretarli sviluppando deduzioni e ragionamenti sugli stessi anche con l'ausilio di rappresentazioni grafiche, usando consapevolmente gli strumenti di calcolo e le potenzialità offerte da applicazioni specifiche di tipo informatico	
MD1	Gianni e Carlo scommettono sul lancio di una moneta: se viene testa vince Gianni, se viene croce viceversa. Dopo sei giocate, con una croce e cinque teste consecutive, Gianni (che è uno statistico di professione) interrompe il gioco. Perché Gianni ha interrotto il gioco? Gianni può dimostrare che la moneta è truccata? Come?
MD2	Presentate i seguenti dati … attraverso più fogli di lavoro Excel mettendo in evidenza per ciascun foglio: **a.** il volume delle vendite; **b.** i Paesi con cui sono stati intrattenuti rapporti commerciali; **c.** il trend di crescita negli ultimi tre anni.
MD3	In un torneo di calcio giovanile una squadra deve ancora giocare 4 partite. Sapendo che questa è la classifica … e che le prossime 4 giornate prevedono le seguenti partite …, dite: **a.** quali risultati dovrebbe fare la squadra per poter vincere il girone; **b.** qual è la probabilità che la squadra vinca il girone.
MD4	Ecco risultati e classifiche della serie A calcistica dello scorso anno. Quale squadra è andata meglio da novembre a gennaio? E da febbraio a maggio? Disegnate dei grafici con l'andamento delle squadre e commentateli.
MD5	Di seguito trovate dei grafici di dati Istat inerenti la pratica sportiva, i tassi di alcolismo e di obesità per varie categorie di italiani. Secondo voi, dai grafici: si può dire che le persone che praticano regolarmente uno sport siano in aumento? Si può dire che le persone con problemi di sovrappeso e obesità siano soprattutto gli uomini? Si può dire che le persone ricoverate per diagnosi attribuibile all'alcol siano in maggioranza giovani? Si può dire che esiste una relazione inversa tra pratica sportiva, obesità e consumo di alcol?
MD6	Progettate tre prove di corsa in velocità su percorsi con difficoltà diverse nell'ambito della struttura scolastica e misurate, per ogni prova, la velocità, la variazione di frequenza cardiaca riscontrata e il tempo di recupero. Mettete in relazione i dati e scrivete un rapporto di ricerca.
MD7	Lavorate per l'Agenzia delle Entrate e state effettuando un controllo ispettivo ai fini IVA relativamente all'esercizio 2015 di un'azienda individuale che svolge attività di commercio al dettaglio con sede a … Avete a disposizione tutta la documentazione dell'azienda: documenti fiscali, registri, contratti, vari documenti originari tra cui prima nota banca e cassa, inventari e bilanci, dichiarazioni e copia dei versamenti da cui si possono rilevare informazioni a tale scopo. Redigete un rapporto descrittivo che contenga anche grafici e tabelle che documenti la regolare tenuta della contabilità, l'osservanza degli obblighi ai fini IVA e l'eventuale livello di evasione e/o di elusione fiscale. Se necessario, definite quali saranno i procedimenti sanzionatori.

5.4 Valutazione delle competenze matematiche degli studenti della scuola secondaria di secondo grado

Vi è un urgente bisogno di dotare i giovani studenti delle competenze e delle conoscenze matematiche necessarie per il futuro. Nell'educazione matematica, la

modellazione matematica sta diventando sempre più rilevante nello sviluppo delle competenze funzionali degli studenti richieste nel XXI secolo. Gli studenti non solo devono acquisire abilità funzionali come la risoluzione dei problemi e il ragionamento, ma la domanda più importante è come usarle nella vita. La modellazione matematica, come si è avuto modo di anticipare, fornisce una piattaforma in cui questa conoscenza può essere utilizzata nella costruzione di un modello per risolvere problemi del mondo reale ed è molto preziosa nell'insegnamento e nell'apprendimento della matematica.

Un cambiamento nel chiarire e ampliare le pratiche di valutazione in classe ha portato alla categorizzazione di tali pratiche al fine di supportare gli insegnanti nelle loro intenzioni di sviluppare una gamma più ampia di strategie di valutazione. Queste categorizzazioni rappresentano un tentativo di sostenere gli insegnanti nell'essere intenzionali nel loro processo decisionale sulla valutazione e di espandere le fonti dei dati di valutazione oltre le tradizionali prove scritte. L'etichettatura di una valutazione come formativa/sommativa si riferisce all'aspetto temporale della valutazione e al modo in cui la temporalità influenza il modo in cui viene effettuata la valutazione. Il tipo di compito assegnato si riferisce a ciò che gli studenti producono come artefatto di valutazione. Una concettualizzazione efficace della valutazione comprende l'osservazione e la comprensione dell'apprendimento degli studenti in contesti di classe, in cui la valutazione è progettata per fornire opportunità agli studenti di apprendere attraverso l'impegno nel compito di valutazione. Pertanto, nel contesto dell'insegnamento della matematica, vi è stato un notevole interesse internazionale nel discutere le caratteristiche di mezzi di valutazione più autentici e nel tentativo di progettarli e implementarli. Tuttavia, all'interno della letteratura didattica della matematica, la teoria sottostante dell'apprendimento è solitamente lasciata implicita e il termine *autentico* è usato come se fosse univoco. A livello dello stesso compito di valutazione, l'autenticità tende a riferirsi alla natura dell'attività matematica coinvolta, ma ciò può essere giudicato secondo una versione idealizzata della natura della matematica, relativamente a una visione di ciò che gli studenti troveranno significativo, spesso coinvolgendo qualche aspetto 'realistico' o riflettendo l'attività degli adulti. L'autenticità è spesso considerata anche a livello dell'intero sistema di valutazione.

In questo caso, di solito si intende che le procedure di valutazione corrispondono agli obiettivi, al contenuto e all'ampiezza del curriculum; il sistema di valutazione è quindi una rappresentazione autentica del curriculum che si sta valutando. Questo aspetto di autenticità è spesso associato a ciò che viene chiamato "valutazione delle prestazioni", ovvero metodi di valutazione che si basano sulla valutazione delle performance degli studenti sui compiti che svolgono come parte della loro attività di apprendimento quotidiano in classe (la valutazione del portfolio, in cui gli studenti formano una raccolta di esempi di lavoro svolto durante un corso per mostrare la gamma dei loro risultati, ne è un buon esempio) o attività che, sebbene progettate specificamente per scopi di valutazione, rispecchiano i tipi di compiti che sono considerati parte della "buona pratica" nell'insegnamento. Nel contesto dei movimenti di riforma del curricolo in cui le valutazioni sono progettate esternamente piuttosto che dagli insegnanti stessi, questo abbinamento tra valutazione e a pedagogia è stato visto come un potente strumento per promuovere la riforma, riconoscendo che è probabile che gli insegnanti adeguino il loro insegnamento a ciò che sanno essere messo alla prova (Bell et al., 1992).

Le forme di curricolo, insegnamento e valutazione sono generalmente coerenti con un modello pedagogico di "competenza" che attribuisce valore agli alunni e ai loro processi interni piuttosto che al loro prodotto finito; che orienta gli insegnanti a cercare prove del progresso e dello sviluppo degli apprendimenti da parte alunni, suggerendo criteri di valutazione molteplici e diffusi. Le differenze nella valutazione tra le pedagogie tradizionali e quelle riformate non sono solo legate ai tipi di compiti utilizzati ai fini della valutazione, ma anche al loro orientamento e ai tipi di criteri che essi implicano. Tuttavia, dobbiamo anche considerare l'esperienza di valutazione degli studenti. Per ottenere una performance di successo, uno studente deve sapere quali tipi di prestazioni sono riconosciute come legittime all'interno del particolare discorso di matematica della scuola e sono quindi suscettibili di essere valutate dal suo insegnante (o altro valutatore) e deve anche avere le conoscenze e le abilità necessarie per produrre tale prestazione; in altre parole, lo studente deve acquisire sia le regole di riconoscimento sia le regole di realizzazione del discorso. Nel caso delle tradizionali concezioni pedagogiche, il carattere esplicito dei criteri di valutazione rende almeno le regole di

riconoscimento aperte al controllo degli studenti in quanto gli insegnanti stessi modellano le forme in cui si aspettano che gli studenti diano le proprie risposte. Naturalmente, questo non significa necessariamente che gli studenti abbiano accesso alle regole di realizzazione che consentirebbero loro di produrre risposte corrette e nella forma richiesta. Ad esempio, un recente studio sulle concezioni della dimostrazione matematica degli studenti delle scuole secondarie inglesi ha rilevato che molti studenti erano in grado di identificare il tipo di argomentazione che il loro insegnante avrebbe valutato maggiormente, anche quando essi stessi avevano prodotto argomentazioni in forme molto diverse. Questi studenti hanno dimostrato di essere consapevoli delle forme accettate di questo aspetto del discorso matematico senza necessariamente potervi partecipare pienamente (Cumming e Maxwell, 1999).

Inoltre, alla luce delle problematiche relative alle differenze nelle caratteristiche dello studente, al campionamento efficace in tutto il dominio dei contenuti e alla recente enfasi sulla valutazione delle abilità contestualizzate in modo significativo e dei processi cognitivi, il test di matematica "tradizionale" probabilmente non fornisce una misura valida dell'abilità dello studente. Di conseguenza, vi è la necessità di incorporare metodi di valutazione alternativi che siano in grado di valutare efficacemente la gamma di abilità matematiche degli studenti. Ciò richiede tecniche di valutazione che si concentrino sulla valutazione di ciò che gli studenti sanno e di ciò che non sanno e l'uso di strumenti di valutazione multipli e complessi che varino dal formato scritto, orale e dimostrativo. Pertanto, sono necessari strumenti di valutazione alternativi, come rubriche, mappe concettuali, portfolio, diari, autovalutazioni e valutazioni tra pari/gruppo per determinare ciò che gli studenti conoscono effettivamente e a che punto del processo di apprendimento si trovano. Il quadro teorico per l'utilizzo della valutazione alternativa in classe include la considerazione degli studenti come costruttori di conoscenza; l'autenticità nei materiali e nelle attività; l'impiego di strumenti di valutazione dinamici e continui; e l'empowerment degli studenti. Mettendo in pratica queste idee, gli attributi individuali di iniziativa, scelta, visione, autodisciplina, fiducia e spontaneità possono essere promossi negli studenti.

Il fondamento della valutazione autentica ruota dunque attorno alla valutazione della capacità di uno studente di applicare ciò che ha appreso in matematica a un contesto del "mondo reale". Piuttosto che un apprendimento meccanico e lo svolgimento passivo dei test, metodi di valutazione autentica si concentrano sulle capacità analitiche di uno studente e sulla capacità di integrare ciò che ha appreso insieme alla creatività esibita attraverso abilità scritte e orali. Vengono valutati anche i risultati degli sforzi collaborativi dei progetti di gruppo. Non è solo importante conoscere il processo di calcolo, ma anche come prendere il prodotto finito e applicarlo a un'altra situazione. Attraverso la valutazione delle prestazioni, ad esempio, gli studenti possono dimostrare come risolvere un problema complesso attraverso uno sforzo collaborativo. Non solo imparano a lavorare in squadra, ma anche a fare brainstorming e utilizzare i loro “granelli di conoscenza” a beneficio dell'intero gruppo. Oltre a ciò, vi sono le “indagini” brevi. In genere, una breve indagine inizia con un problema di matematica semplice in cui lo studente può dimostrare come ha padroneggiato i concetti e le abilità di base. L'insegnante può chiedere agli studenti di interpretare, calcolare, spiegare, descrivere o prevedere qualunque cosa stiano analizzando. Un docente può inoltre valutare la comprensione del mondo reale da parte dello studente e il modo in cui i processi analitici si relazionano, ricorrendo ad un quiz, ad una breve risposta scritta o orale, un disegno, un diagramma, una tabella o un grafico. L’autovalutazione è una forma molto efficace di assessment, se adeguatamente impostata e gestita da parte del docente. In tal senso, una volta che l'insegnante ha chiaramente spiegato e fornito le aspettative relative al progetto può chiedere agli studenti di valutare le proprie attività e la partecipazione. Rispondere alle seguenti domande aiuterà gli studenti a imparare a valutare se stessi e il proprio lavoro in modo obiettivo: Qual è stata per te la parte più difficile di questo progetto? Cosa pensi che dovresti fare dopo? Se potessi svolgere di nuovo questo compito, faresti qualcosa di diverso? Se sì, cosa? Cosa hai imparato da questo progetto? (Cumming e Maxwell, 1999, pp. 182-184).
Progettare task di valutazione secondo questi principi può essere potenzialmente molto vantaggioso per gli insegnanti oltre che offrire opportunità agli studenti di dimostrare e condividere il proprio pensiero, che può quindi servire come base per una ricca discussione in classe. Attraverso tali attività, gli insegnanti sono in grado

di determinare e trasmettere un feedback appropriato e utile che può far progredire gli studenti nel loro apprendimento e che può arricchire il loro percorso verso l'istruzione futura, entrambi elementi essenziali della valutazione formativa. Le attuali prospettive nell'insegnamento della matematica incoraggiano gli insegnanti a coinvolgere gli studenti nello sviluppo sia dei contenuti che dei processi (ad es. ragionamento adattivo, disposizioni produttive e competenza strategica). Un test da solo non può valutare adeguatamente la complessa natura del pensiero matematico degli studenti. Piuttosto, sono necessari diversi tipi di valutazione per determinare processi complessi come la risoluzione di problemi, la giustificazione o la dimostrazione di soluzioni o il collegamento di rappresentazioni matematiche. Tali modalità rappresentano altresì un modo per ascoltare e rispondere al pensiero soggettivo ed individuale degli studenti nonché al loro personale processo di apprendimento. Ciò suggerisce che la valutazione è parte integrante dell'istruzione e che gli studenti hanno molteplici e continue opportunità di dimostrare il proprio pensiero all'insegnante e ai propri pari, in modo che questa prova di conoscenza possa essere utilizzata per far progredire l'apprendimento. Insegnanti e studenti hanno bisogno di tempo per sperimentare i cambiamenti, a volte avendo successo e altre volte fallendo, ma imparando da quei fallimenti e riprovando.

Alla luce di quanto finora esposto, ben si comprende come i compiti autentici sono progettati per aiutare gli studenti a considerare seriamente la matematica nella sua utilità ed importanza, anche nella vita reale e non solo sui libri o all’interno di un’aula. Quando gli studenti comprendono lo scopo di un determinato problema in matematica, è più probabile che persistano quando vengono sfidati. I compiti autentici generalmente hanno una "parte centrale aperta", il che significa che gli studenti possono utilizzare diverse rappresentazioni e soluzioni per comunicare le loro conoscenze e ragionamenti.

CONCLUSIONI

Il presente lavoro di tesi ci ha permesso di comprendere quali e quanti cambiamenti abbiano investito la nostra società ed in quale modo noi stiamo rispondendo ad essi. I cambiamenti sociali, politici, geografici, istituzionali, storici e culturali richiedono all'individuo lo sviluppo di capacità e competenze finora mai richieste, atte a far sì che egli si adegui, affronti e gestisca efficacemente tutte le trasformazioni e i mutamenti a cui è continuamente sottoposto. Pertanto, risulta necessario e urgente acquisire competenze che, se fino a ieri non erano essenziali, oggi sono invece considerate decisive per affrontare il cambiamento.

La valutazione oggi si configura come strumento indispensabile per favorire il cambiamento di pratiche e contenuti della formazione e ri-orientare gli interventi formativi rendendoli più adeguati, appunto, alle esigenze sociali ed individuali. Infatti, lo sviluppo dei processi formativi dovrebbe avere come esito prodotti significativamente rilevanti e essere caratterizzati da situazioni operative, dinamiche e stimolanti (Trinchero, 2017) dove la competenza da acquisire è il risultato di una pratica, nonché di una riflessione e di una interiorizzazione del processo di apprendimento. E dall'apprendimento, appunto, si deve partire. Lo scopo è quello di coinvolgere docenti e studenti in un processo di costruzione delle conoscenze e di sviluppo di abilità e competenze che tengano conto delle variabili che influenzano i processi di insegnamento-apprendimento. Nella relazione educativa che si instaura, l'enfasi si pone sulla motivazione, la curiosità, la partecipazione, la socializzazione, la metacognizione e soprattutto l'apprendimento personalizzato (Castoldi, 1998). Tutti questi elementi devono poter essere sia acquisiti che interiorizzati sia dall'insegnante che dall'alunno stesso. Il processo valutativo ha l'obiettivo primario di coinvolgere i protagonisti dei processi educativi e formativi creando in loro una certa consapevolezza di capacità, competenze e conoscenze acquisite ed appunto interiorizzate.

La valutazione ha pertanto subito un notevole sviluppo diventando una presenza continua che indaga, soprattutto in ambito educativo e pedagogico, non solo singole classi scolastiche ma intere scuole e sistemi educativi nella loro complessità. E

poiché la scuola trae forza e debolezze dall'ambiente per il quale opera, la valutazione entra nel merito dei rapporti fra sistema educativo e contesto in cui si colloca, prendendo in considerazione il capitale sociale di riferimento nel territorio circostante.

Mentre in passato l'attenzione era rivolta principalmente al "prodotto" dell'evento formativo, oggi l'implementazione delle pratiche valutative risponde all'esigenza di misurare l'efficacia e l'impatto esterno delle singole azioni formative, e per questo è necessario sottoporre il sistema formativo a indagini relative sia agli aspetti processuali che ai risultati prodotti.

In particolare, quando si esprime un giudizio di valutazione è necessario affrontare questioni sia relative all'allievo che all'insegnante/formatore e dunque riguardanti l'apprendimento, l'aspetto affettivo ed emozionale, le abilità cognitive (Wiggins, 1998).

In tal senso, il portfolio delle competenze rappresenta un'occasione fondamentale per un radicale cambiamento nella gestione dell'apprendimento e della valutazione scolastica, in una prospettiva che consideri la personalizzazione educativa e didattica dei vari percorsi (Palm, 2008). La dimensione della competenza offre la possibilità agli studenti di poter recuperare una visione personale, responsabile, educativa e auto valutativa del proprio processo di apprendimento. Le competenze andranno così attivate attraverso percorsi personalizzati e significativi orientati all'acquisizione di conoscenze e abilità ma soprattutto alla maturazione di nuove competenze.

Le riflessioni che sono scaturite dal presente lavoro di tesi hanno, in definitiva, permesso di evidenziare una dimensione importante ovvero l'unicità dell'apprendimento.

Ogni soggetto va considerato nelle sue dimensioni più disparate, nelle sue caratteristiche più intime e nelle diverse modalità con cui affronta la vita e le esperienze che lo forgeranno. In tal senso, proprio le esperienze rivestono un ruolo fondamentale nell'acquisizione di nuove conoscenze e un discorso più approfondito andrebbe dedicato proprio all'apprendimento esperienziale. Esso riguarda la conoscenza applicata, messa in atto e vissuta, in contrasto con l'apprendimento cognitivo, che è invece la conoscenza accademica come, ad esempio,

l'apprendimento del vocabolario. L'apprendimento esperienziale affronta i bisogni e i desideri dell'individuo ed è correlato al cambiamento e alla crescita personale (Kolb, 2014).

L'apprendimento diviene più efficace quando è l'argomento ad essere rilevante per gli interessi personali degli studenti e quando mette in atto nuovi atteggiamenti o nuove prospettive, senza tuttavia prevedere cambiamenti eccessivi o stravolgimenti per la personalità dell'individuo che apprende. Gli studenti infatti dovrebbero esercitare un controllo completo sull'intero processo di apprendimento, sulla sua natura e sulla direzione che esso prende. L'autovalutazione dovrebbe essere il principale metodo di valutazione proprio perchè implica una partecipazione attiva e complice dello studente stesso (Tacconi, 2011). L'apprendimento esperienziale consente agli studenti di mettere in relazione le proprie conoscenze con la propria vita quotidiana permettendo loro di assimilarle più facilmente e quindi applicare ciò che hanno imparato. Riflettendo sulle proprie prestazioni regolarmente e in modo guidato, gli studenti prestano maggiore attenzione al proprio pensiero, alle proprie abilità, alle competenze che possiedono e a quelle che possono sviluppare, alle proprie caratteristiche e a come saperle riconoscere. Questo tipo di meta-pensiero è particolarmente importante nel cambiamento e nella crescita personale e il docente riveste un ruolo significativo nel guidare i discenti alla scoperta del proprio stile di apprendimento.

L'insegnante crea un'atmosfera positiva per l'apprendimento, funge da guida consentendo agli studenti di commettere errori ma di imparare da essi durante l'intero processo. L'insegnante ha il ruolo di chiarire i concetti e gli scopi di ogni fase ogni volta che sarà necessario, fornendo altresì agli studenti risorse e informazioni per l'apprendimento sia prima che durante l'attività. L'insegnante fornisce agli studenti la libertà di sperimentare, di scoprire, di trovare soluzioni, di creare alternative condividendo con loro sentimenti e pensieri ma senza tuttavia dominare su di essi consentendo loro di riflettere da soli. L'insegnante facilita lo studente, ne asseconda le attitudini e risponde ai suoi bisogni permettendogli di scoprire attraverso quale modalità egli apprende meglio e con più facilità. L'insegnante, in tal senso, è mediatore e facilitatore e non impartisce solo istruzioni e concetti. Inoltre, le ricerche e le esperienze che sono state presentate nei paragrafi

precedenti inducono a pensare, e spesso a confermare, quanto uno stile di insegnamento che asseconda le caratteristiche e le attitudini dello studente possa condurlo a risultati migliori, atteggiamenti e comportamenti più sani, relazioni più efficaci (Trinchero, 2017).

Essere consapevoli e responsabili del proprio personale apprendimento deve divenire parte integrante del processo stesso di apprendimento per consentire all'individuo di ottenere quella conoscenza che cambia, evolve e si trasforma costantemente ma che rimane vitale per la nostra esistenza in tutte le sue sfaccettature. Apprendere significa trasformare la struttura delle proprie conoscenze, i legami esistenti tra di esse con la finalità di immagazzinarne e integrarne delle nuove, riorganizzare la mappa dei concetti già elaborati in modo da operare in situazioni problematiche inedite. Apprendere, soprattutto in modo significativo, presuppone anche lo sviluppo di strategie per acquisire rapidamente, e in modo efficace, concetti e competenze nuove. Apprendere diviene dunque un processo che coinvolge i processi intellettuali e le diverse forme del pensiero al raggiungimento di finalità differenti, mantenendo le nuove conoscenze nel tempo per utilizzarle in svariati altri contesti.

Alla luce di quanto esposto nelle pagine precedenti, è risultato particolarmente interessante riflettere sulle numerose dimensioni che il processo di apprendimento e di insegnamento implica evidenziando l’unicità di ogni persona sia nella personalità e nei comportamenti che nell’acquisizione di conoscenze/competenze nuove e inedite.

BIBLIOGRAFIA

AA. VV. (2009). *Il curricolo verticale dai 3 ai 14 anni. Competenze, saperi, modelli e metodologie.* Milano: Franco Angeli.

Abaté, C. J. & Cantone, K. (2005). An evolutionary approach to mathematics education: enhancing learning through contextual modification. *Primus, 15*(2), 157–176.

Aglieri M. (2005). Prove di valutazione autentica, in *Dirigenti Scuola*, 4.

Arter J., & Bond L. (1996). Why is assessment changing. In R. E. Blum, & J. A. Arter (Eds.), *A handbook for student performance assessment in an era of restructuring*, Alexandria, Association for Supervision and Curriculum Development.

Baldacci, M. (1993). *L'istruzione individualizzata*. Milano: Franco Angeli.

Baldacci, M. (2016), *Logiche e aporie della meritocrazia. Appunti di lavoro.* Lecce: Pensa MultiMedia Editore srl.

Baldrighi, A., Pesci, A., & Torresani, M. (2003). Relazioni disciplinari e sociali nell'apprendimento cooperativo. Esperienze didattiche e spunti di riflessione. *Matematica e Difficoltà, 12*, 170-178.

Barnett, R. (1994). *The Limits of Competence. Knowledge, Higher Education and Society*. Buckingham: Open University Press.

Bell, A., Burkhardt, H., & Swan, M. (1992). Balanced assessment of mathematical performance. In R. Lesh & S. J. Lamon (Eds.), *Assessment of Authentic Performance in School Mathematics*. Washington D.C.: American Association for the Advancement of Science.

Benadusi L., & Molina S. (a cura di) (2018), *Le competenze. Una mappa per orientarsi*. Bologna: il Mulino.

Bennett R. E. (2011). Formative assessment: A critical review. Assessment. *Education: Principles, Policy, & Practice, 18*, 5-25.

Beswick, K. (2011). Putting context in context: an examination of the evidence for the benefits of 'contextualised tasks. *International Journal of Science and Mathematics Education, 9*, 367-390.

Bezzi C. (2001). *Il disegno della ricerca valutativa*. Milano: Franco Angeli.

Blum W., Galbraith P. L., Henn H.-W., & Niss M. (ed.) (2007). *Modelling and applications in mathematics education*, New York: Springer, 3-44.

Boaler, J. (1993). The role of contexts in the mathematics classroom: Do they make mathematics more real?. *For the learning of mathematics, 13*(2), 12-17.

Boaler, J. (1993). Encouraging the transfer of 'school' mathematics to the 'real world' through the integration of process and content, context and culture. *Educational Studies in Mathematics, 25*(4), 341-373.

Boaler, J. (1994). When do girls prefer football to fashion? An analysis of female underachievement in relation to 'realistic' mathematics contexts. *British Educational Research Journal*, *20*(5), 551-564.

Bocciolesi, E. (2011). Emozioni e Tecnologie Nell'Apprendimento: Una Riflessione. *Vega Journal*, *7*(2).

Bocciolesi, E. (2014a). Education, reading and hypertextuality. The fragmentation of the body text. *Vega Journal*, *10*(2), 34-55.

Bolondi, G., Ferretti, F., & Giberti, C. (2018). Didactic contract as a key to interpreting gender differences in maths, in *Journal of Educational, Cultural and Psychological Studies, 18,* 415- 435.

Bonazza, V. (2019). *Valutazione e scuola. Ideologia, senso comune e cultura della ricerca*. Milano: Franco Angeli.

Borel, E. (2002). Les exercices pratiques de mathématiques dans l'enseignement secondaire. *Gazette des Mathematiciens*, *93*, 47-64.

Boud D., Cohen R., & Sampson J. (2001). *Peer learning in higher education: learning from & with each other*. London: Kogan Page.

Bourdieu, P. (1977). *Outline of a theory of practice*. Cambridge, University press.

Bourdieu, P. & Wacquant, L.J.D. (2002). *An invitation to reflexive sociology*. Cambridge: Polity press.

Brousseau G. (1980). L'échec et le contrat. *Recherches en didactique des mathématiques*, *41*, 180-187.

Brousseau G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, *7* (2).

Brown A. L. (1996). I progressi dell'apprendimento, *Cadmo, IV* (12), 13-40.

Bruner J. (2000). *La cultura dell'educazione.* Milano: Feltrinelli.

Calvani A. (2007). *Fondamenti di didattica. Teoria e prassi dei dispositivi formativi*. Roma: Carocci.

Capone, R., Rogora, E., & Tortoriello, F.S. (2017). La matematica come collante culturale nell'insegnamento. Matematica, Cultura e Società. *Rivista dell'Unione Matematica Italiana, 2*(3), 293-304.

Capperucci, D. (2018). Valutazione e certificazione delle competenze attraverso le rubriche: triangolazione per migliorare la validità e affidabilità dei risultati. *Lifelong Lifewide Learning, 14*(31), 140 – 155.

Casati, R. (2013). *Contro il colonialismo digitale. Istruzioni per continuare a leggere.* Roma-Bari: Laterza.

Castoldi M. (1998). *Segnali di qualità*. Brescia: La Scuola.

Castoldi M. (2009). *Valutare le competenze. Percorsi e strumenti*. Roma: Carocci.

Castoldi M. (2009). *Rubriche valutative. Guidare l'espressione del giudizio*. Torino: UTET.

Castoldi M., *Didattica Generale*, Milano, Mondadori, 2010.

Castoldi M. (2011). *Progettare per competenze. Percorsi e strumenti*. Roma: Carocci.

Cerini G. (2013). *Le nuove indicazioni per il curricolo verticale*. Santarcangelo di Romagna: Maggioli SpA.

Ceruti M. & Preta L. (1995). *Che cos'è la conoscenza.* Roma-Bari: Laterza.

Chevallard Y., & Joshua M.A. (1982). Un exemple d'analyse de la transposition didactique: la notion de distance. *Recherches en didactique des mathématiques, 3*(1), 159-239.

Chomsky N. (1970). Aspect of the theory of syntax, Cambridge, MIT Press, 1965, tr. It. In N. Chomsky, *La grammatical generative trasformazionale*. Saggi linguistici, vol. II. Torino: Boringhieri.

Coggi, C., & Notti, A. (ed.) (2002). *Docimologia*. Lecce: Pensa Multimedia.

Coggi C., (a cura di) (2005). *Per migliorare la didattica universitaria*, Lecce: Pensa Multimedia.

Commissione Europea (1996). *Libro Bianco, Crescita, Competitività, Occupazione. Le sfide e le vie da percorrereper entrare nel XXI secolo.* Lussemburg, Bollettino della CE, supplemento n. 6.

Comoglio M. (2002). La valutazione autentica. *Orientamenti Pedagogici, 49*(1), 93- 112.

Comoglio, M. & Cardoso, M. (2000). *Insegnare e apprendere in gruppo. Il cooperative learning*. Roma: Las editrice.

Costanzo G. (2015). La valutazione di sistema nella scuola italiana. *Educare.it, 15*(11), 159-163.

Cumming, J. J., & Maxwell, G. S. (1999). Contextualising authentic assessment. *Assessment in Education, 6*(2), 177-194.

Cuoco, A., Goldenberg, E. P. & Mark, J. (1996). Habits of Mind: An Organizing Principle for Mathematics Curricula. *Journal of Mathematical Behavior, 15*, 375–400.

Cresson E. (a cura di) (1995). Insegnare e apprendere: verso la società conoscitiva, Commissione europea: Libro bianco sull'istruzione e la formazione, Unione Europea, Bruxelles. http://www.bdp.it/db/docsrv//PDF/Libro%20Bianco.pdf

D'Amore, B. (2002). La ricerca in didattica della matematica come epistemologia dell'apprendimento della matematica. *Scuola & Città*, 4.

D'Amore B. (2001). Il "triangolo" allievo-insegnante-sapere in didattica della matematica. *L'educazione matematica, 3*, 2.

D'Amore, B. (2003). *Problemi di matematica nella scuola primaria*. Bologna: Pitagora.

D'Amore, B. (2007). Epistemologia, didattica della matematica e pratiche d'insegnamento. *La matematica e la sua didattica, 21*(3), 347-369.

Da Re F. (2013). *Didattica per competenze,* Torino: Pearson.

De Bellis, V. A., & Goldin, G. A. (2006). Affect and meta-affect in mathematical problem solving: a representational perspective. *Edu-cational Studies in Mathematics*, *63*, 131-147.

Deist, Delamare F., & Winterton, J. (2005). What Is Competence?. *Human Resource Development International*, *8*(1), 27 – 46.

De Lange, J. (1996). Using and applying mathematics in Education. In A. Bishop (Ed.), *International Handbook of Mathematics Education*, (vol. 4, pp. 49-90). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Dewey J. (1993). *Esperienza e educazione.* Roma: La Nuova Italia.

Dewey, J. (1913). *Interest and effort in education*. Carbondale and Edwardsville: Southern Illinois University Press.

Di Martino, P., & Zan, R. (2010). Me and maths: towards a definition of attitude grounded on students narratives. *Journal of Mathematics Teacher Education, 13* (1), 27-48.

Domenici, G. (2005). *Manuale della valutazione scolastica*. Roma-Bari: Laterza.

Domìnguez, M.C., & Garcìa Gonzalez, P. (2012). *Tratamiento didáctico de las competencias bàsicas*. Madrid: Editorial Universitas.

Domínguez, M.C., Medina, A., & López, E. (2018). Desarrollo de competencias en el primer curso de universidad: estudio de caso. *Publicaciones, 48*(1), 39-62.

Ernest, P. (2003). Relevance versus utility: some ideas on what it means to know mathematics. In B. Clarke, D. M. Clarke, G. Emanuelsson, B. Johansson, D.V. Lambdin, F. L. Lester, A. Wallby, & K. Wallby (Eds), *International perspectives on learning and teaching mathematics* (pp. 313-327). Göteborg: Goteborg University, National Cen-ter for Mathematics Education.

Fandiño Pinilla, M. I. (2008). *Molteplici aspetti dell'apprendimento della matematica*. Trento: Erickson.

Fandiño Pinilla M. I. (2003). "Diventare competente", una sfida con radici antropologiche. In: D'Amore B., Godino D.J., Arrigo G., & Fandiño Pinilla M.I.). *Competenze in matematica*. Bologna: Pitagora.

Ferrari P. L. (2004). *Matematica e linguaggio.* Bologna: Pitagora Editrice.

Ferretti F., Paraskevi M. Chrysanthou, & Vannini I. (eds) (2018). *Formative Assessment for mathematics teaching and learning. Teacher Professional Development Research by Videoanalysis Methodologies*. Milano: FrancoAngeli.

Flavell, J. (1976). Metacognitive aspects of problem solving, in Resnik L. B. (a cura di). *The nature of intelligence*. Hillsdale: Elbaum.

Fleming, N.D., & Mills, C. (1992). Not Another Inventory, Rather a Catalyst for Reflection. *To Improve the Academy, 11*, 137–155.

Freudenthal, H. (1968). Why to teach mathematics so as to be useful. *Educational Studies in Mathematics*, *1* (1/2), 3-8.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education: China lectures*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Frignani, P. & Bonazza, V. (2003). *Le prove oggettive di profitto. Strumenti docimologici per l'insegnante*. Roma: Carocci Editore.

Fumarco, G. (2002). *Professione docente. Ruoli e competenze*. Roma: Carocci.

Gairìn, J. (2002). *Gestiòn de relaciones con el entorno. El cambio y la innovaciòn*, en Master en Direcciòn y Gestiòn de Centros Educativos. UBA-Universidad de Deusto, mòdulo VII.

Gardner H. (1993). *Educare al comprendere*. Milano: Feltrinelli.

Giannoli, F. (2012). Logica e creatività: la matematica "bifronte" (e divertente). *Bricks*, *2*, 34-41.

Giovannini, M.L. (1998). *La valutazione delle innovazioni nella scuola*. Roma: Cappelli.

Goldin, G. A. (2002). Affect, meta-affect, and mathematical belief structures. In G. C. Leder, E. Pehkonen, & G. Törner (Eds.). *Beliefs: a hidden variable in Mathematics Education?* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 59-72.

Gravemeijer, K. P. E., & Terwel, J. (2000). Hans Freudenthal: a mathematician on didactics and curriculum theory. *Journal of Curriculum Studies, 32*, 777–796.

Grice H. P. (1993). *Logica e conversazione*. Bologna: Il Mulino.

Guasti L. (2012). *Didattica per competenze. Orientamenti e indicazioni pratiche*. Trento: Erickson.

Guasti L., & Plessi P. (2014). *Rapporto sul progetto giovani*. Brescia: Università Cattolica di Brescia.

Hannula, M. S. (2001). The structure and dynamics of affect in mathematical thinking and learning. In M. Pytlak, T. Rowland, & E. Swoboda (Eds.). *Proceedings of the seventh congress of the European society for research in mathematics education* Rzeszów: Erme, 34-60.

Hannula, M. S. (2006). Motivation in mathematics: goals reflected in emotions. *Educational Studies in Mathematics*, *63* (2), 2006, 165- 178.

Hayes E. R. (1994). *Portfolio Assessment in Adult Basic Skills Education.* Madison: Madison Area Technical College.

Hardy, G.H. (1940). *A Mathematician's Apology*. Cambridge: Cambridge University Press.

Heritage M. (2010). *Formative Assessment. Making it Happen in the Classroom*. Thousand Oaks: Corwin.

Hidi, S. (1990). Interest and its contribution as a mental source for learning. *Review of Educational Research, 60* (4), 549-571.

Hoffmann, M. H. G., Lenhard, J., & Seeger, F. (2005). *Activity and Sign: Grounding Mathematics Education*. New York: Springer.

Ianes D., Celi F., & Cramerotti S. (2003). *Il piano educativo individualizzato progetto di vita. Guida 2003-2005*. Trento: Erickson.

Ianes D., (2016). «Dirigersi verso scuole inclusive», in D. Ianes, S. Cramerotti, *Dirigere scuole inclusive. Strumenti e risorse per il dirigente scolastico.* Trento: Erickson.

ISFOL, G. Di Francesco, (a cura di) (1998). *Unità Capitalizzabili e crediti formativi. Metodologie e strumenti di lavoro.* Milano: Franco Angeli.

Jonassen D. H. (1994). Thinking technology, toward a constructivist design model. *Educational technology*, XXXIV, 34-37.

Jonassen H. D. (2000). Revisiting activity theory as a framework for designing student-centered learning environments. In D. H. Jonassen & S. M. Land (Eds). *Theoretical foundations of learning environments.* NJ: Erlbaum Mahwah, 1-23.

Julie, C. & Mbekwa, M. (2005). What would grade 8 to 10 learners prefer as context for mathematical literacy? The case of Masilakele sec-ondary school. *Perspectives in Education, 23* (3), 31–43.

Julie, C. & Holtman, L. (2008). The Relevance of School Mathematics Education (ROSME). In L. Holtman, C. Julie, Ø. Mikalsen, D. Mtetwa & M. Ogunniyi (Eds.), *Some Developments in Research in Science and Mathematics in Sub-Saharan Africa: Access, Relevance, Learning, Curriculum Research.* Somerset West, South Africa: African Minds, 379–405.

Kaiser-Messmer, G. (1993). Results of an Empirical Study into Gender Differences in Attitudes towards Mathematics. *Educational Studies in Mathematic, 25*, 209-233.

Kilpatrick J, Swafford J, Findell B (eds) (2001). *Adding it up. Helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.

Kintsch, W. (1988). The use of knowledge in discourse processing: A construction-integration model. *Psychological Review, 95,* 163-182.

Kolb D. (2014). *Experiential learning: Experience as the source of learning and development* (2nd Ed). Upper Saddle River: Pearson.

Kouwenhoven, W. (2009). Competence-based curriculum development in Higher Education: a globalised concept?. In Lazinca, A., Calafate, C. *Technology Education and Development*, 1-29.

Krapp, A., Hidi, S. & Renninger, K.A. (1992). Interest, learning and development. In K. A. Renninger, S. Hidi & A. Krapp (Eds.), *The role of interest in learning and development*. Hillsdale, Lawrence Erlbaum Associates Publishers, 3-25.

Krapp, A. (1993). *The construct of interest: characteristics of individual interests and interest-related actions from the perspective of a per-son-object theory. (Studies in educational psychology).* Munich: Institut fur Empirische Padagogik und Padagogische Psychologie der Universitat der Bundeswehr.

Krapp, A. (1999). Interest, motivation and learning: An educational-psychological perspective. *European Journal of Psychology of Education, 14*, 23-40.

Krapp. A. (2002a). Structural and dynamic aspects of interest development: theoretical considerations from an ontogenetic perspective. *Learning and instruction, 12*(4), 383-409.

Krapp, A. (2002b). An educational-psychological theory of interest and its relation to SDT. In E. L. Deci & R. M. Ryan (Eds.), *Handbook of self-determination research.* Rochester: The University of Rochester press, 405-427.

Krapp, A. (2005). Basic needs and the development of interest and intrinsic motivational orientations. *Learning and instruction, 15*, 381-395.

Krapp, A. (2005). An educational-psychological conceptualisation of interest. *International Journal for Educational and Vocational Guidance, 7*, 5-21.

Lastrucci, E. (2004). *Valutazione diagnostica. Metodi e strumenti per costruire il profilo in ingresso dell'alunno*. Roma: Anicia.

Lastrucci, E. (2006). *Progettare, programmare e valutare l'attività formativa*, Roma: Anicia.

Le Boterf, G. (1995). *De la compétence. Essai sur un attracteur étrange*. Paris: Les Editions d'Organisation.

Leder, G. C., & Forgasz, H. J. (2006). Affect and Mathematics Education. PME perspectives. In A. Gutierrez, & P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education. Past, present and future*. Rotterdam: Sense Publishers, 367-422.

Ligabue A. (2006). *Didattica ludica. Competenze in gioco*, Trento: Erickson.

Lingefjärd, T. (2006). Faces of mathematical modeling. *ZDM, 38* (2), 96-112.

Llinares, S. (2014). Experimentos de enseñanza e investigaciòn. Una dualidad en la pràctica del formador de profesores de matematicas. *Educación matemática, 26*(1), 31-51.

Llinares, S. (2016). Como dar sentido a las situaciones de enseñanza-aprendizaje de las matematicas? Algunos aspectos de la competencia docente del profesor. *Cuadernos de Investigaciòn y Formaciòn en Educaciòn Matemàtica, 11*(15), 57-67.

Lucisano, P., & Corsini, C. (2015). Docenti e valutazione di scuole e insegnanti. *Giornale Italiano della Ricerca Educativa, 15,* 98-109.

Lusardi, A., Financial literacy skills for the 21st century: Evidence from PISA. *Journal of consumer affairs*, 49(3), 2015, pp. 639-659.

Lusardi, A., Mitchell, O. S., & Curto, V. (2010). Financial literacy among the young. *Journal of consumer affairs*, *44*(2), 358-380.

Magenes, A. & Maracci, M., Le competenze nella soluzione di problemi di matematica. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, vol. 38A-B(5), 2015, pp. 637-656.

Maracci, M., & Martignone, F. (2017). Promuovere lo sviluppo di conoscenze e competenze in matematica. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, vol. 40A-B(2), 113-134.

Marmocchi P., Dall'Aglio, C. & Zannini M. (2004). *Educare le life skills. Come promuovere le abilità psico-sociali e affettive secondo l'organizzazione Mondiale della Sanità*. Trento: Erickson.

Marzano A. (2013). *L'azione di insegnamento per lo sviluppo di competenze*, Roma: Pensa editore.

Marzano R., Pickering D., & McTighe J. (2012). *Assessing Student Outcomes: Performance Assessment Using the Dimensions of Learning Model*. Alexandria: ASCD.

Mazza L., Passaro D., Veredice A., & Cusi A. (2020). Le dimostrazioni senza parole: quale ruolo possono svolgere in un approccio mirato a favorire lo sviluppo di consapevolezze circa il senso dell'attività dimostrativa?, in D'Amore B., Sbaragli S., (a cura di), *Didattica della matematica, disciplina scientifica per una scuola efficace*, (pp. 79-80), Bologna: Pitagora Editrice.

Mazzeo, R. ((2005). *L'organizzazione efficace dell'apprendimento. Personalizzazione e metodo di studio*. Trento: Erickson.

McClelland, D. (1973). Testing for Competence Rather Than for Intelligence. *American Psychologist*, *28*(1), 1-40.

McLeod, D. B., & Adams, V. M. (1989). *Affect and mathematical problem solving. A new perspective*. New York: Springer Verlag.

Medina A., Domìnguez, M.C., & De La Herran Gascon, A. (2014). *Fronteras en la Investigación de la Didáctica*. Madrid: Uned.

Medina, A. (Coord.) (2015)). *Innovación de la educación y de la docencia*. Madrid: Ramón Areces – UNED.

MIUR, (2018). *Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo di istruzione*, Roma, Ministero dell'Istruzione e della Ricerca.

Morin, E. (1999). *La testa ben fatta, Riforma dell'insegnamento e riforma del pensiero.* Milano: Raffaello Cortina Editore.

Mosley J. (1993). *Turn Your School Round.* Wisbech: LDA.

NCTM (1970/2002). *A history of mathematics education in the United States and Canada*, vol 32. National Council of Teachers of Mathematics, Washington, DC.

NCTM (1980). *An agenda for action. Recommendations for school mathematics of the 1980s*. National Council of Teachers of Mathematics, Reston.

NCTM, (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics, Reston.

Nesti, R. (2017). *Game-based learning. Gioco e progettazione ludica in educazione.* Pisa: Edizioni Ets.

Nicol D., Thomson A., & Breslin C. (2014). Rethinking feedback practices in higher education: A peer review perspective. *Assessment and Evaluation in Higher Education, 39*(1), 102-122.

Nicoli D. (2012). L*inea guida sulla progettazione formativa di percorsi di istruzione e formazione professionale*. Roma: Centro Nazionale Opere Salesiane.

Niss, M. (2003). *Mathematical competencies and the learning of mathematics: the danish KOM project*. In A. Gagatsis & S. Papastavridis (a cura di) 3° Mediterranean Conference on Mathematical Education, 3-5 January 2003 (pp. 115–124). Atene: Hellenic Mathematical Society.

Niss M, & Højgaard T (eds) (2011). *Competencies and mathematical learning. Ideas and inspiration for the development of mathematics teaching and learning in Denmark*. Roskilde University, Department of Science, Systems and Models, IMFUFA, Roskilde.

OECD, (2007). Assessing Scientific, Reading and Mathematical Literacy. A framework for PISA 2006, OECD, Parigi (tr. It PISA 2006. *Valutare le competenze in scienze, lettura e matematica. Quadro di riferimento di PISA 2006*, a cura dell'INVAlSI. Roma: Armando Editore.

Op't Eynde, P., De Corte, E., & Verschaffel, L. (2002). Framing students' mathematics-related beliefs: a quest for conceptual clarity and a comprehensive categorization. In G. C. Leder, E. Pehkonnen, & G. Törner (Eds.), *Beliefs: a hidden variable in Mathematics Education?*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 13-38.

O'sullivan N, & Burce A. (2014). Teaching and learning in competency-based education, *The Fifth International Conference on e-Learning (eLearning-2014), 22-23 September 2014, Belgrade, Serbia* - elearning.metropolitan.ac.rs.

Palm T. (2008). Performance Assessment and Authentic Assessment: A Conceptual Analysis of the Literature. *Practical Assessment, Research and Evaluation, 13*(4), 1-11.

Palumbo M. (2001). *Il processo di valutazione. Decidere, programmare, valutare*. Milano: Franco Angeli.

Panadero E., Brown G. T. L., & Strijbos J. (2016). The future of student self-assessment: A review of known unknowns and potential directions. *Educational Psychology Review, 28*(4), 803-830.

Paparella, N. (2012). *L'agire didattico*. Napoli: Guida Editore.

Pellerey M. (2004). *Le competenze individuali e il portfolio*. Roma: La Nuova Italia.

Pellerey, M. (2010). *Le competenze. Il ruolo delle competenze nei processi educativi scolastici e formativi*. Napoli: Tecnodid.

Pellerey M. (2008). *L'agire educativo. La pratica pedagogica tra modernità e postmodernità*. Roma: Ed. LAS.

Perrenoud, P. (2003). *Costruire competenze a partire dalla scuola*. Roma: Anicia.

Pfeiffer J. W., & Jones J. E. (1977). *Reference guide to handbooks and annuals*. San Diego: University Associates Publishers and Consultants.

Piaget, J. (1972). *La formazione del simbolo del bambino.* Roma: La Nuova Italia.

Pinto Minerva F. (2005). "Il laboratorio tra attività d'aula e tirocinio", in Perucca A. (a cura di), *Le attività di laboratorio e di tirocinio nella formazione universitaria*, vol. I, 77-84, Roma: Armando.

Pontecorvo C., Aiello A., & Zucchermaglio C. (1995). *I contesti sociali dell'apprendimento, Acquisire conoscenze a scuola, nel lavoro, nella vita quotidiana.* Milano: Ambrosiana.

Prenzel, M. (1998). *Conditions for the persistence of interest. Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association*. New Orleans: LA.

Prenzel, M. (1992). The selective persistence of interest. In K.A. Renninger, S. Hidi & A. Krapp (Eds.), *Interest in learning and development*, 71-98. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Previtali D. (2011). *"Responsabilità sociale" intervento al Seminario dirigenti*. Rimini 2011. Tecnodid: Napoli.

Quaglino, G.P. (1990). Competenza. In *Appunti sul comportamento organizzativo*. Torino: Tirrenia Stampatori.

Renninger, K.A., Ewen, L.& Lasher, A. K. (2002). Individual interest as context in expository text and mathematical word problems. *Learning and instruction, 12* (4), 467-491.

Resnick, L. B. (1995). Imparare dentro e fuori la scuola. In C. Pontecorvo, A. M. Ajello, C. Zucchermaglio (Eds). *I contesti sociali dell'apprendimento,* 61-81. Milano, LED.

Roberts T. S. (2006). *Self, peer, and group assessment in e-learning*. Hershey: Information Science Pub.

Sacchella A. (2014). Perché è importante progettare La progettazione non è un optional. *Approfondimenti, 6,* https://www.edu.lascuola.it/News/Riviste/articoloSDID_6.pdf

Salinas, N., & Sgreccia, N. (2017). Concepciones docentes acerca de la Resoluciòn de Problemas en la escuela secundaria. Nùmeros. *Revista de Didàctica de las Matematicas, 94*, 23-45.

Sbaragli, S. (2011). Le competenze nell'Ambito della matematica. *Difficoltà in matematica, 7*(2), 143-156.

Scardamalia M., & Bereiter C. (2014)). Computer support for knowledge-building communities. *The Journal of the Learning Sciences, 3* (3), 265-283.

Schiefele, U. (1991). Interest, learning, and motivation. *Educational psychologist, 26* (3&4), 299-323.

Schiefele, U., Krapp, A., & Winteler, A. (1992). Interest as a predictor of academic achievement: A meta-analysis of research. In K. A. Ren-ninger, S. Hidi, & A. Krapp (Eds.), *The role of interest in learning and development* Hillsdale: Erlbaum, 183–212.

Schmidt H.G. (1983). Problem-based learning: rationale and description, in *Medical Education, 17*.

Schoenfeld, A. H. (1987). What's all the fuss about metacognition? In: Schoenfeld A.H. (ed.). Cognitive science and mathematics education. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Ass, 189-215.

Shavelson R. J. (2006). *On the integration of formative assessment in teaching and learning with implications for teacher education.* Paper prepared for the Stanford Education Assessment Laboratory and the University Hawaii Curriculum Research and Development Group.

Spencer L., & Spencer S. (1995). *Competenza nel lavoro.* Milano: Franco Angeli.

Stacey, K., & Turner, R. (2015)., The Evolution and Key Concepts of the PISA Mathematics Frameworks. In K. Stacey and R. Turner (eds) *Assessing Mathematical Literacy.* Springer, 5–33.

Sternberg, R.J. (1999). The theory of successful intelligence. *Review of General Psychology, 3*, 292-316.

Tacconi G. (2011). *La didattica al lavoro. Analisi delle pratiche educative nell'Istruzione e formazione professionale*. Milano: Franco Angeli.

Tallini G., (2016), *La didattica laboratoriale. Progettazione e organizzazione*, disponibile su www.academia.edu.

Torp L., & Sage S. (2002). *Problems as possibilities. Problem-based learning for K-16 education*. New York: Association for Supervision and curriculum Development, Alexandria.

Torrance H., & Pryor J. (2001). Developing formative assessment in the classroom: using action research to explore and modify theory. *British Educational Research Journal, 27*(5), 615-631.

Trinchero R. (2018). *Costruire e certificare competenze nel secondo ciclo*. Milano: Rizzoli.

Turner, R. & Adams, R. (2012). *Some Drivers of Test Item Difficulty in Mathematics: An Analysis of the Competency Rubric*. American Educational Research Association (AERA).

Turner, R. et al. (2009). "Using mathematical competencies to predict item difficulty in PISA", in *Research on PISA. Research outcomes of the PISA research conference 2009*. Kiel, Germany, September 14–16, 2009. New York: Springer.

UNESCO. (2011). *Challenges in basic mathematics education*. Paris: UNESCO.

Van den Heuvel - Panhuizen, M. (2005). The role of contexts in assessment problems in mathematics. *For the learning of mathematics*, *25* (2), 2-9.

Vannini, I. (2009). *La Qualità nella didattica*. Trento: Erickson.

Vertecchi B. (2003). *Manuale della valutazione. Analisi degli apprendimenti e dei contesti*. Milano: Franco Angeli.

Vertecchi, B. (1993). *Decisione didattica e valutazione*. Firenze: la Nuova Italia.

Vertecchi, B. (2002). *Le parole della scuola*. Firenze: La Nuova Italia.

Voorhees, R. (2001). Measuring What Matters: Competency Based Learning models in Higher education. *New Directions for Institutional Research no 110*, 28(2), San Francisco, CA: Jossey-Bass.

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society: the development of higher psychological processes*. Massachusetts: Harvard University Press.

Warwick P., Mercer, N., Kershner, R., & Kleine Staarman, J. (2010). In the Mind and in the Technology: The Vicarious Presence of the Teacher in Pupil's Learning of Science in Collaborative Group Activity at the Interactive Whiteboard. *Computers & Education*, *55*(1), 350-362.

Watson, J. & Callingham, R. (2003). "Statistical Literacy: A Complex Hierarchical Construct". *Statistics Education Research Journal*, *2*(2), 3-46.

Wiggins G. (1993). *Assessing student performance: Exploring the purpose and limits of testing.* San Francisco: Jossey-Bass.

Wiggins G. (1998). *Educative assessment. Designing assessments to inform and improve student performance*. San Francisco: Jossey-Bass, 32.

Wiggins, G. & McTighe, J.(1998). *Understanding by Design*. Upper Saddle River: Merrill Prentice Hall.

Wiggins, G. & McTighe, J. (2004). *Fare progettazione*. Roma: Las.

Wiggins, G., & McTighe, J. (2008). Put understanding first. *Educational Leadership*, *65*(8), 36-41.

Wittorsky, R. (1998). De la fabrication des competences. *Éducation permanente, 135*, 57-67.

Zahner W., Calleros E., & Pelaez K. (2021). Designing learning environments to promote academic literacy in mathematics in multilingual secondary mathematics classrooms. *Mathematics Education*, *53*, 359-373.

Zanniello G. (2008). *Educazione e orientamento professionale*, Roma: Armando.